BULANIK MANTIK DENETLEYİCİLERİ

Bölüm-2

Bulanık Kümeler

Bulanık Kümeler

Bölüm 2 : Hedefleri

- ✓ Bulanık Mantık Sistemlerinin temelini teşkil eden bulanık kümelerin temel konularını anlamak.

- ✓ Sözel değişkenlerin bulanık mantık sistemlerinde nasıl kullanılabileceğini anlamak.

- ✓ Genel bulanık işlemleri kullanarak bulanık kümeler üzerinde çalışabilmek.

Bölüm 2 : Ana Başlıkları

- ✓ Bulanık Kümelerin Tanımı
  - ➢ Bulanık kümelerin keskin kümeler ile kıyaslanması
  - ➢ Bulanık küme gösterimleri
  - ➢ Üyelik fonksiyonları
- ✓ Bulanık Küme İşlemleri
  - ➢ Klasik kümelerde işlemler
  - ➢ Temel bulanık küme işlemleri
  - ➢ Üyelik fonksiyonlarını değiştirmek için bulanık küme işlemleri
  - ➢ Bazı ileri bulanık küme işlemleri

Bazı Sorular !

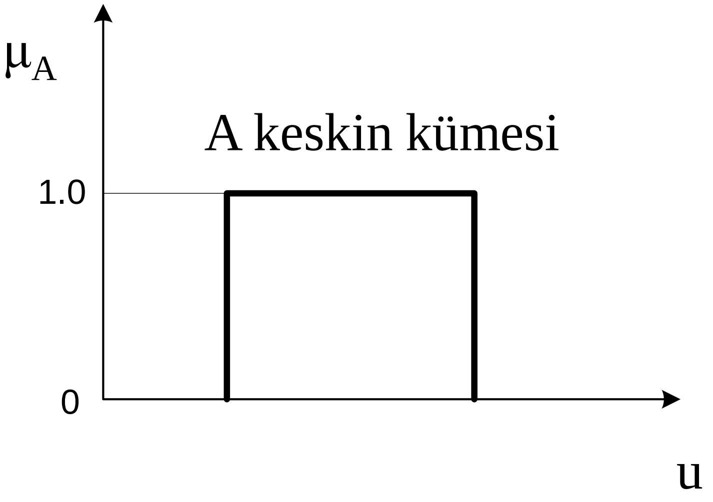
- ✓ Bulanık küme nedir?
- ✓ Niçin bulanık küme?
- ✓ Bulanık küme ile keskin küme arasında ne fark vardır?
- ✓ Bulanık kümelerin özellikleri nelerdir?
- ✓ Bulanık kümelerin gerçek dünya ile ilişkileri?

KESKİN KÜMELER
VE
BULANIK KÜMELER

KESKİN KÜMELER **(Crisp Sets)**

- A keskin kümesi bu kümeye tam üye olan elemanlardan oluşan bir küme olarak tanımlanabilir.

- Evrendeki her bir eleman ya kümenin içindedir ya da değildir.



KESKİN KÜMELER **(Crisp Sets)**

U evrensel bir küme olsun;

Evrensel Küme: Belirli bir konu veya uygulamayı ilgilendiren muhtemel bütün elemanları içeren kümeye denir.

A keskin kümesi ise U evrensel kümesi içinde bir küme olsun:

A keskin kümesi üç farklı şekilde tanımlanabilir

1. Listeleme Metodu: Kümenin bütün elemanları listelenir

Örnek:

Evrensel küme(U)	Küme(A)
1,2,3,4,5,……,100,…	3,4,5,6

Sonlu kümeler için kullanılabilir, kullanımı sınırlıdır

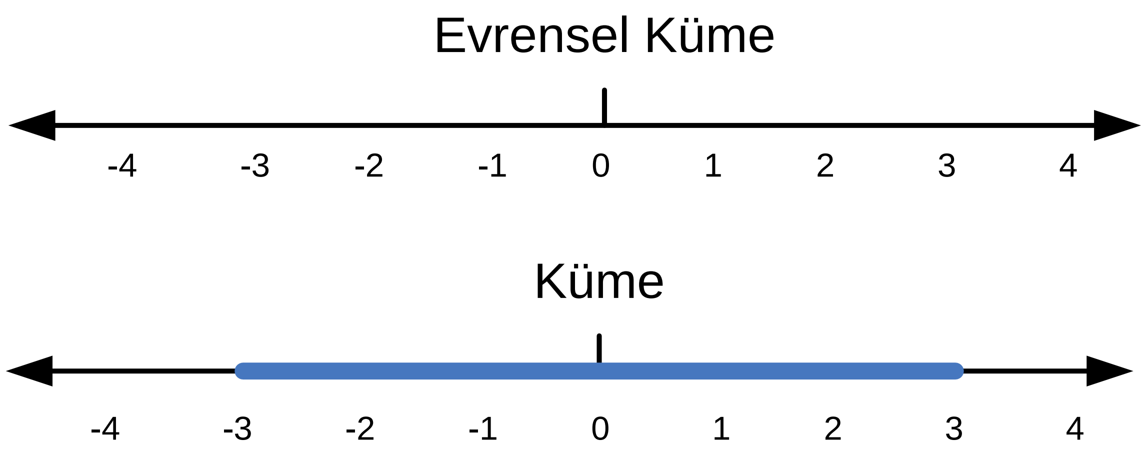
KESKİN KÜMELER **(Crisp Sets)**

2. Kural Metodu: Küme elemanları bir kural ile belirtilir.

$$A = \left\{ x \in U \, / \, x \;\; bazı \;\; sartları \;\; karsilar \right\}$$

Örnek:

Abs(x)<3 kuralına uyan sadece gerçek x sayıları kümesi



Kural Metodu daha geneldir

KESKİN KÜMELER **(Crisp Sets)**

2. Üyelik Metodu:

A kümesi için 0-1 üyelik fonksiyonu belirlenir ve µA(x) şeklinde ifade edilir.

$$\mu A(x) = \begin{Bmatrix} 1 \ldots eger \;\; x \in A \\ 0 \ldots eger \;\; x \notin A \end{Bmatrix}$$

Bu ayrım (discrimination) fonksiyonu olarak adlandırılır.

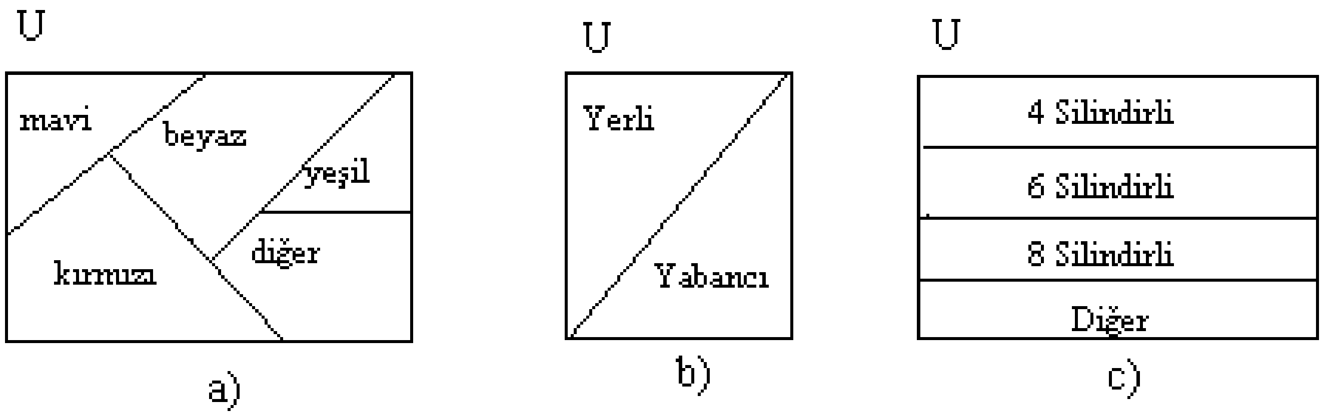
$$\mu A : x \rightarrow \{0,1\}$$

KESKİN KÜMELER **(Crisp Sets)**

Örnek: Amerika'daki bütün otomobillerin kümesini düşünelim. Bu U evrensel kümesidir.

U kümesinin elemanları tek tek arabalardır.

U kümesini oluşturmak için farklı tiplerde çok sayıda alt küme tanımlanabilir



a) renklerine göre,
b) yerli ve yabancı olmalarına göre,
c) silindir sayılarına göre alt kümelere ayrılması

KESKİN KÜMELER **(Crisp Sets)**

Örnek: *U evrensel kümesi içindeki, 4 silindirli arabaları A kümesi ile tanımlayalım;*

$$A = \{x \in U \;/\; x = 4silindirli \;\; arabalar\}$$

veya

$$\mu A(x) = \begin{cases} 1 \ldots eger \;\; x \in U \;\; ve \;\; x = 4silindirli \\ 0 \ldots eger \;\; x \in U \;\; ve \;\; x \neq 4silindirli \end{cases}$$

SORU 1?

Amerikan malı arabalar veya olmayanlar şeklinde bir küme oluşturun.

✓ *Amerika'da Üretilmiştir* etiketi taşıyorsa, Amerikan malıdır.

(keskin bakış açısı)

✓ *Amerikan üretici firması* tarafından yapılmışsa, Amerikan malıdır.

(keskin bakış açısı)

Herkes bu bakış açısı ile bakıyor mu?

HAYIR!

- Çünkü bazı Japon arabaları Amerika'da üretilmekte ve *Amerika'da Üretilmiştir* etiketine sahiptir.
- Bazı amerikan üreticilerinin ürettiği arabaların parçalarının çoğu Amerika dışında üretilmektedir.

- Hangisi amerikan arabasıdır?

Bu problemdeki zorluk bazı kümelerin belirgin sınırlarının olmamasıdır

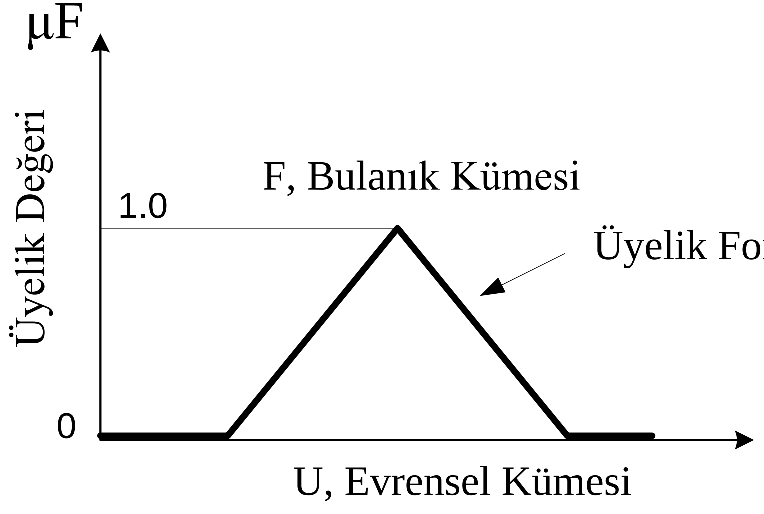
- Geleneksel küme kuramına göre bir küme iyi tanımlanmış özelliklere sahip olmalıdır(KESKİN SINIRLI)
- Geleneksel küme kuramındaki bu sınırlamanın üstesinden gelmek için başka bir küme kuramı gereklidir.

- Bu ise BULANIK KÜME kuramıdır.

BULANIK KÜMELER **(Fuzzy Sets)**

- Bulanık kümeler küme elemanlarının kısmi üyeliğine izin verirler.
- Bulanık kümenin elemanlarının alacağı üyelik değerleri [0-1] aralığındadır.
- Bu nedenle, bulanık bir küme her bir elemanının üyeliğinin derecelendirilebildiği keskin bir kümenin genelleştirilmiş halidir.
- U evrensel kümesinde F diye tanımlanan bir bulanık küme üyelik fonksiyonu μF(x) tarafından karakterize edilir.
- Bir üyelik fonksiyonu ise U evrensel kümesindeki bir elemanın bulanık alt kümesine benzerliğinin derecesinin ölçümünü sağlar
- Üyelik 0’dan 1’e kadardır.

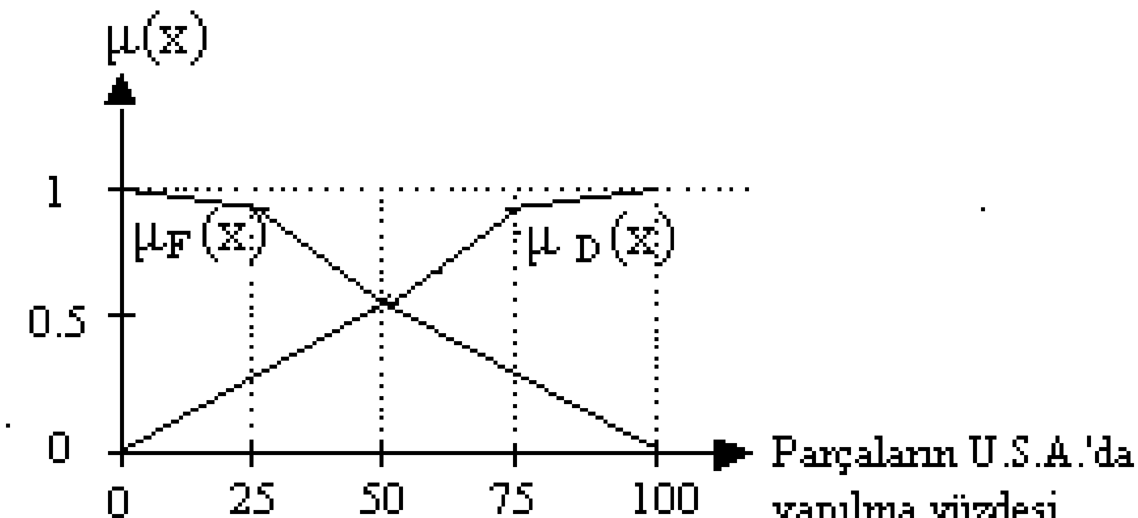
- Bir bulanık küme, elemanlarının üyelik değerini belirlemek için üyelik fonksiyonu olarak adlandırılan üçgen, yamuk, çan eğrisi v.b. fonksiyonlar kullanırlar.



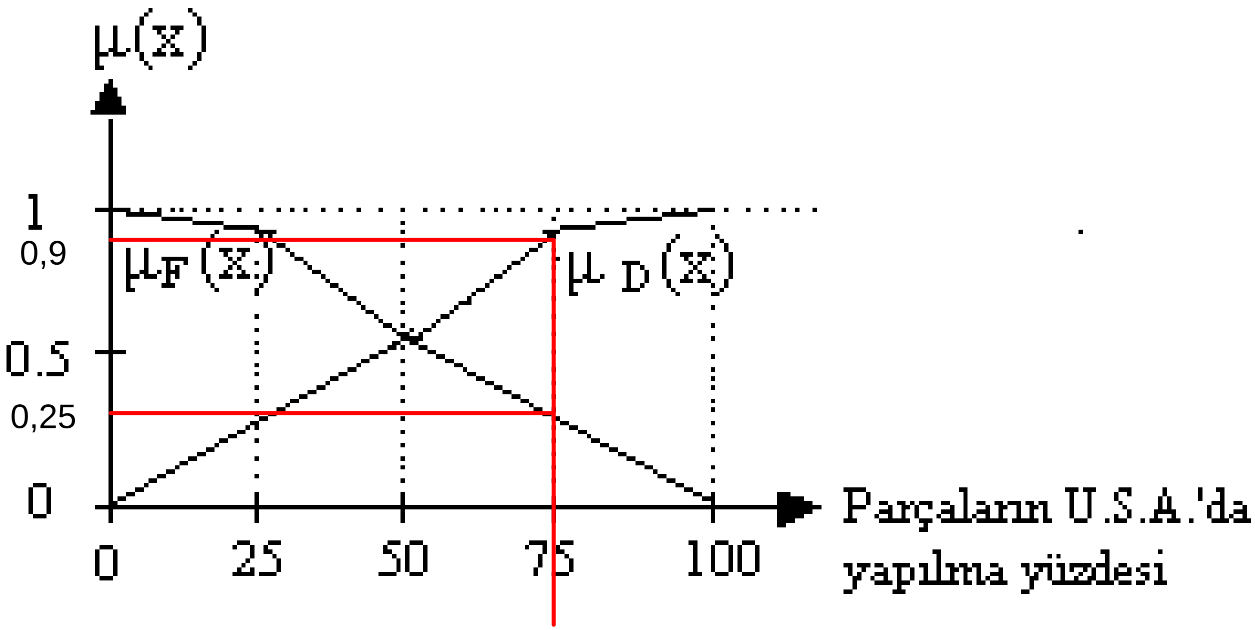
Soru 1 Cevabı(devam):

Parçaların ABD'de yapılma yüzdelerine göre yerli veya yabancı araba hükmünü vermek daha kabul edilebilirdir.

Dolayısıyla yerli ve yabancı arabalar için üyelik fonksiyonu ilişkisi şekil'de görüldüğü gibi μD(x) ve μF(x) olarak gösterilmiştir. Dikkat edilirse belli bir araba her iki alt kümede de yani yerli arabalar ve yabancı arabalar kümesinde de aynı anda bulunmaktadır. Ancak farklı üyelik derecelerine sahiptirler. Şekilde yatay eksen parçaların ABD'de yapılma yüzdelerini göstermektedir.



Örneğin bizim arabamız %75 ABD’de yapılmışsa μD(x)=0,9 ve μF(x)=0,25’tir. Sonuçta bizim arabamız yerli olarak tanımlanır.



Ancak %50 ye %50 üyelik derecesine sahip olduğunda ne yapılacaktır. Bu durum maksimum bulanıklık ve paradoks teşkil eder.

Bu örnekteki ana nokta şunu göstermektedir ki*, bir eleman bulanık mantıkta farklı üyelik derecelerinde birden fazla kümede yer alabilir. Bu durum keskin küme kuramında mümkün değildir*

Bulanık Kümeler

Bulanık Küme Gösterimleri:

- U, evrensel kümeyi, u ise bu evrensel küme içerisindeki bir elemanı temsil eder.
- U evrensel kümesinde, F bulanık kümesi üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.

$$\mu_F : U \rightarrow [0,1]$$

- U evrensel kümesi içerisindeki bir F bulanık kümesi genellikle u elemanlarının ve bu elemanların üyelik derecelerinin sıralı çiftlerinden oluşan bir küme ile temsil edilirler.

$$F = \left\{ (u, \mu_F(u)) \middle| u \in U \right\}$$

Bulanık Kümeler

- U sürekli ise, F bulanık kümesi şöyle ifade edilebilir :

$$F = \int_U \mu_F(u)/u$$

Bu eşitlikte integral işareti üyelik fonksiyonu μF(u) ile ilişkilendirilmiş $u \in U$ olan bütün noktaların toplamını gösterir

- U ayrık ise, F bulanık kümesi aşağıdaki gibi ifade edilir :

$$F = \sum \mu_F(u_i)/u_i$$

$$F = \mu_F(u_1)/u_1 + \mu_F(u_2)/u_2 + \ldots + \mu_F(u_N)/u_N$$

Bu eşitlikte toplama işareti, üyelik fonksiyonu μF(u) ile ilişkilendirilmiş $x \in U$ olan bütün noktaların toplamını gösterir.

veya

$$F = \{(\mu_F, u_I), \ldots..\}$$

Sürekli Evrensel Küme

- Eğer X sürekli elemanlı bir evrensel küme ise;

  X evrensel kümesinde bulanık A kümesi şöyle ifade edilebilir.

$$A = \int_U \mu_A(x_i) / x_i$$

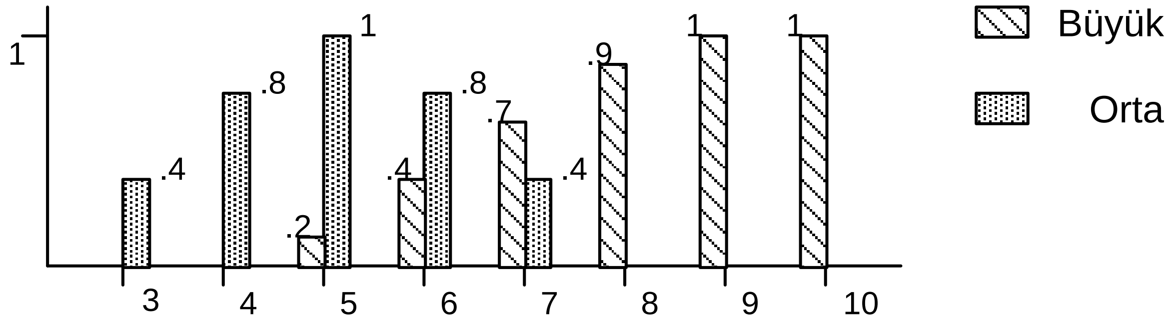
$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x - 30}{5} \right)^4}$$

Ayrık Evrensel Küme

- Eğer $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ayrık elemanlı bir evrensel küme ise;
  X evrensel kümesinde bulanık A kümesi şöyle ifade edilebilir

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \cdots + \mu_A(x_n)/x_n$$

- Örneğin
  - Büyük = 0.2/5 + 0.4/6 + 0.7/7 + 0.9/8 + 1/9 +1/10, ve
  - Orta = 0.4/3 + 0.8/4 + 1/5 + 0.8/6 + 0.4/7,
  - Bu durumda;

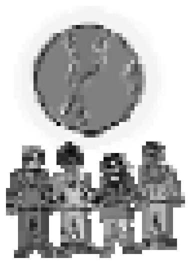


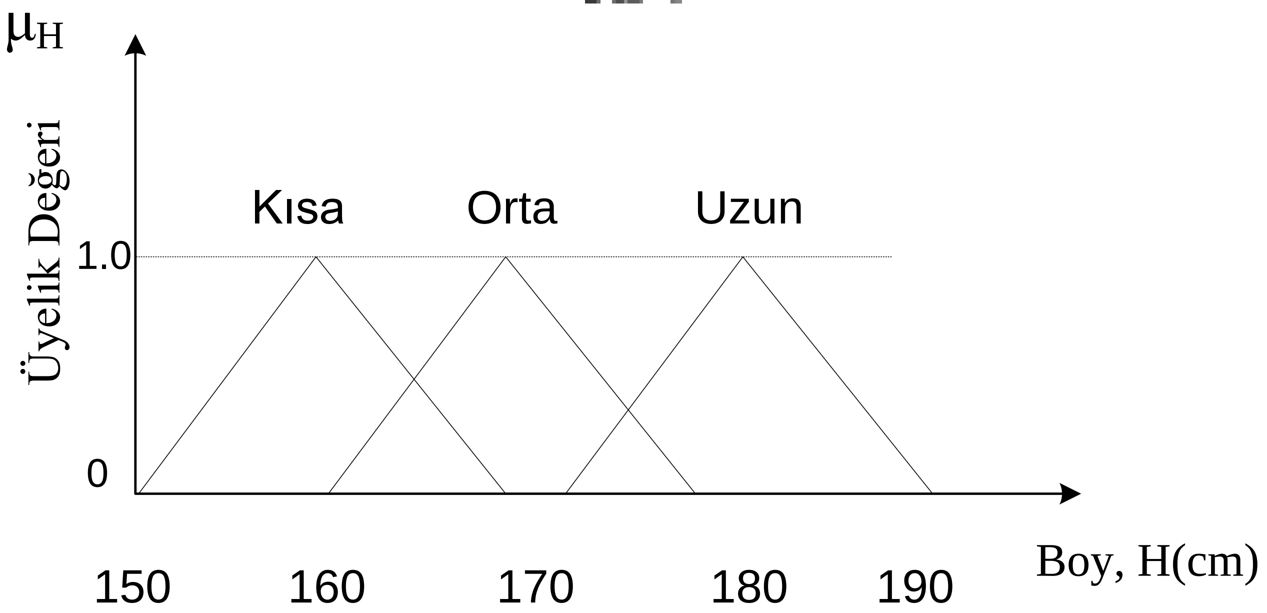
Evrensel Küme

- "Aynı karakteristik özelliğe sahip nesnelerin toplamı" olarak tanımlanır.
- Gösterimi : U veya X, bu kümelere ait elemanlar ise u veya x olarak gösterilirler.

- Bazı örnekler:
  - Hata,
  - Arabaların hızı,
  - Aktuatörlerin gerilimleri

İnsanların boylarına göre evrensel küme örneği :





Bulanık Kümeler

- Evrensel kümede, F ile adlandırılan ‘ 5 tam sayısına yaklaşık eşit sayılar’ bulanık kümesi şöyle gösterilir :

  F=0.1/2+0.4/3+0.85/4+1.0/5+0.85/6+0.4/7+0.1/8

- Benzer şekilde F ile adlandırılan, ‘ 4 tam sayısına yakın olan sayılar’ bulanık alt kümesi şöyle gösterilir :

  F=0.4/2+0.8/3+1/4+0.8/5+0.4/6+0.1/7+0.0/8

- Daha önce belirtildiği gibi F bulanık kümesi aşağıdaki şekilde yazılır :

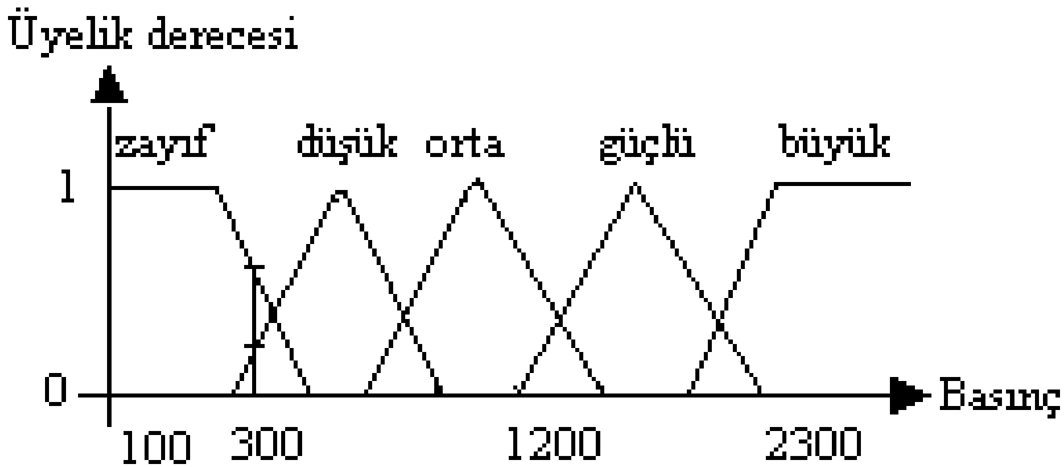
  F={(2,0.4),(3,0.8),(4,1),(5,0.8),(6,0.4),(7,0.1),(8,0)}

SÖZEL DEĞİŞKENLER (Linguistic Variables)

- ✓ Zadeh 1965 yılında yayınladığı makalesinde şöyle diyor; “Aşırı karmaşıklıktan kaçınmak için sözel değişkenler kullanılır. Sözel değişkenlerin değeri sayı değil doğal dillerdeki kelimeler veya cümlelerdir. Kelimelere veya cümlelere sözel karakter atamak sayılara atamaktan daha kolaydır.”
- ✓ u’yu sözel bir değişkenin adı kabul edelim (örneğin sıcaklık).
- ✓ u sözel değişkeninin sayısal değeri x ile gösterilsin burada $x \in U$’dur. Bazen x ve u birbiriyle değiştirilerek kullanılabilir. Bazen eğer sözel değişken bir harf ise x ile u birbirinin yerine kullanılabilmektedir. Bu özellikle bazı mühendislik uygulamalarında karşılaşılan bir durumdur. Bu sözel değişken genellikle evrensel kümeyi kaplayan T(u) bir dizi terimlere ayrıştırılır.

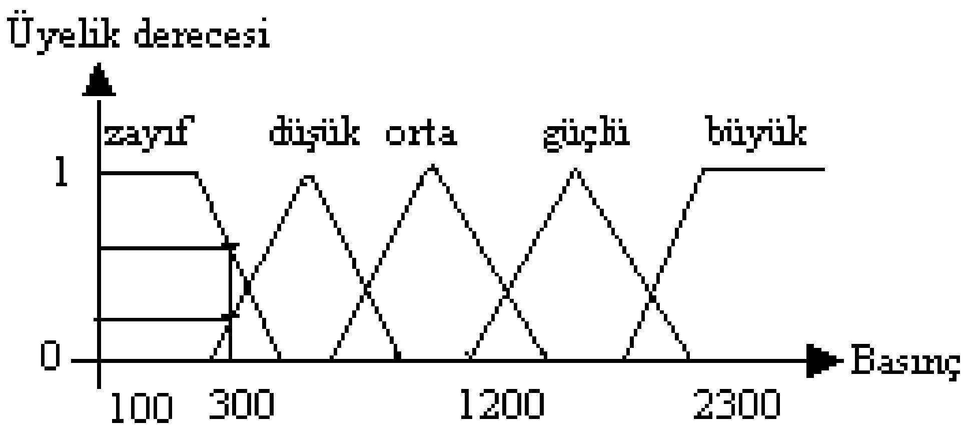
SÖZEL DEĞİŞKENLER
Örnek

- Basınç (u)’yu sözel bir değişken olarak kabul edelim.
- T (basınç)={zayıf, düşük, orta, güçlü, buyuk)
- T(basınç)’ın içindeki her bir terim U=[100psi,2300psi] evrensel kümesi içindeki bir bulanık küme tarafından tanımlanır.



SÖZEL DEĞİŞKENLER

Bu terimler aşağıdaki şekilde üyelik fonksiyonları gösterilen bulanık kümeleri ile tanımlanabilir. Basıncın ölçülen değerleri (x) yatay eksen boyuncadır. Örnek olarak x=300 iken bu, zayıf basınç ve düşük basınç kümelerinde farklı üyelik derecelerinde yer almaktadır.



Üyelik Fonksiyonları
(Membership Functions)

Bulanık mantığın mühendislik uygulamalarında üyelik fonksiyonları μF(x), genellikle kuralların sebep veya sonucunda bulunan terimlerle ilişkilidir.

Örnek:

Bazı kurallar ve ilişkili üyelik fonksiyonları şunlardır:

✓EĞER yatay konum *pozitif orta* ve açısal konum *negatif küçük* ise O HALDE kontrol açısı *pozitif büyük* tür [μPO(x), μNK(θ), μPB(ϕ)].

✓EĞER y(t) *0.5'e yakın*sa O HALDE f(y) *0'a yakın*dır [μY-0.5(y), μY-sıfır(f(y))].

Üyelik Fonksiyonları

(Membership Functions)

Bulanık kümeler için üyelik fonksiyonu tanımlamanın iki yolu vardır. Bunlar: sayısal ve fonksiyonel tanımlamadır.

Sayısal tanımlamaya örnek :

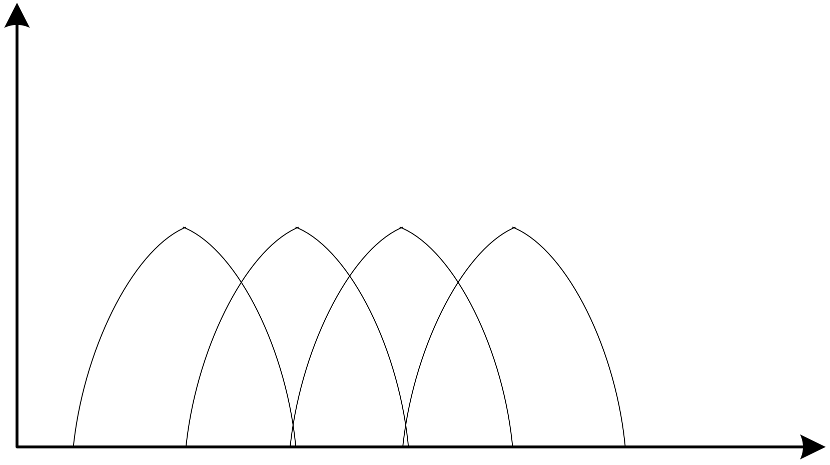
$$\mathrm{F} = 0.1/2 + 0.4/3 + 0.85/4 + 1.0/5 + 0.85/6 + 0.4/7 + 0.1/8$$

Fonksiyonel Tanımlamaya örnek :

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x-5)^2}$$

Üyelik Fonksiyonları

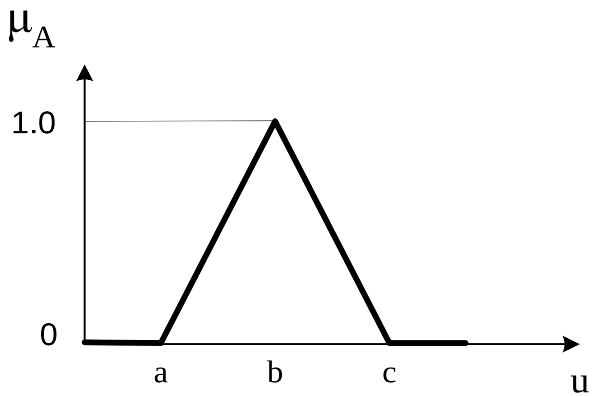
- ✓ Bulanık kümeleri göstermek için standart fonksiyonlar kullanabiliriz.
- ✓ Pratikte sık kullanılan üyelik fonksiyonları şunlardır :
  - s-fonksiyon
  - π-fonksiyon
  - Üçgen
  - Yamuk
  - Üstel
  - Gausyen



Üyelik Fonksiyonları

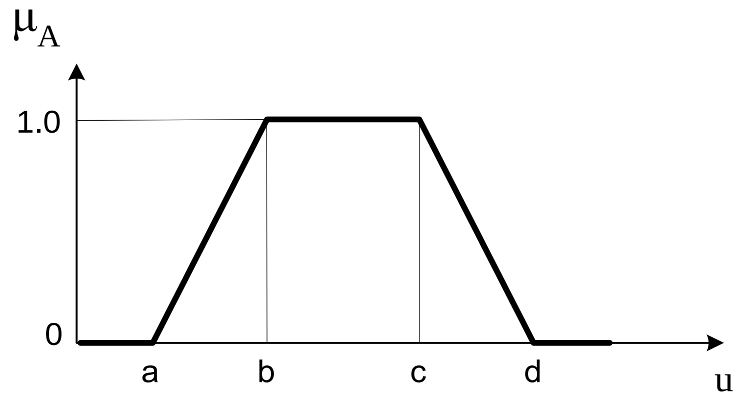
Üçgen Üyelik Fonksiyonu

$$\ddot{U}(u;a,b,c)=\begin{cases} 0 & u<a \quad \text{için} \\ (u-a)/(b-a) & a\le u\le b \quad \text{için} \\ (c-u)/(c-b) & b\le u\le c \quad \text{için} \\ 0 & u>c \quad \text{için} \end{cases}$$



Yamuk Üyelik Fonksiyonu

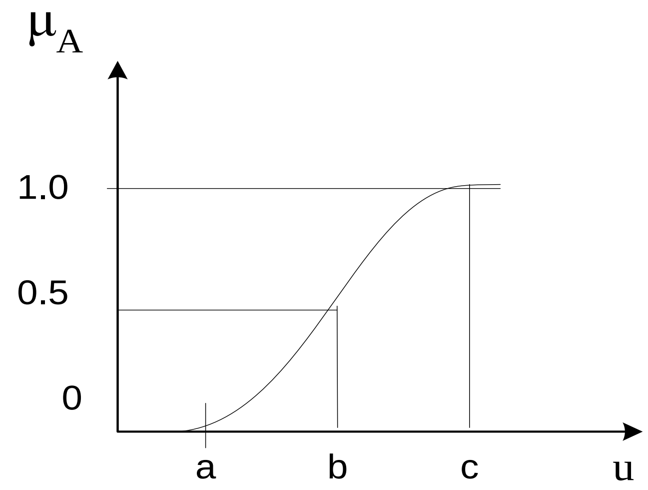
$$Y(u;a,b,c,d)=\begin{cases} 0 & u<a \quad \text{için} \\ (u-a)/(b-a) & a\le u< b \quad \text{için} \\ 1 & b\le u\le c \quad \text{için} \\ (d-u)/(d-c) & c< u\le d \quad \text{için} \\ 0 & u>d \quad \text{için} \end{cases}$$



Üyelik Fonksiyonları

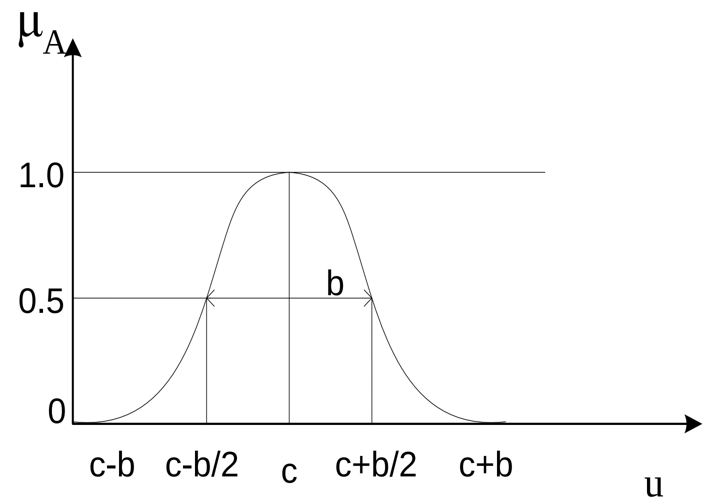
S-Üyelik Fonksiyonu

$$S(u;a,b,c)=\begin{cases} 0 & u<a \quad \textit{için}, \\ 2\left[(u-a)/(c-a)\right]^2 & a\le u\le b \quad \textit{için}, \\ 1-2\left[(u-c)/(c-a)\right]^2 & b\le u\le c \quad \textit{için}, \\ 1 & u>c \quad \textit{için}, \end{cases}$$



π-Üyelik Fonksiyonu

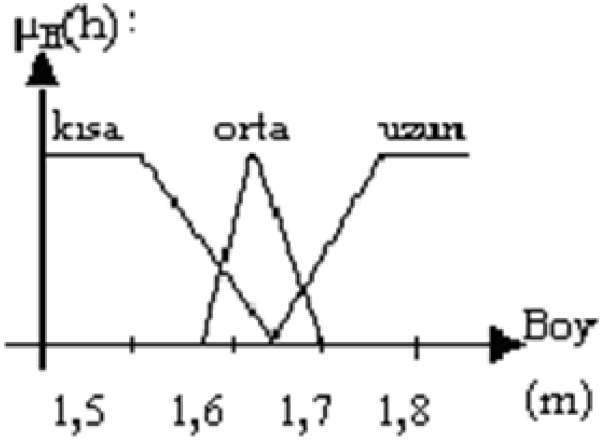
$$\pi(u;b,c)=\begin{cases} S(u;c-b,c-b/2,c) & u\le c \quad \textit{için} \\ 1-S(u;c,c+b/2,c+b) & u\ge c \quad \textit{için} \end{cases}$$

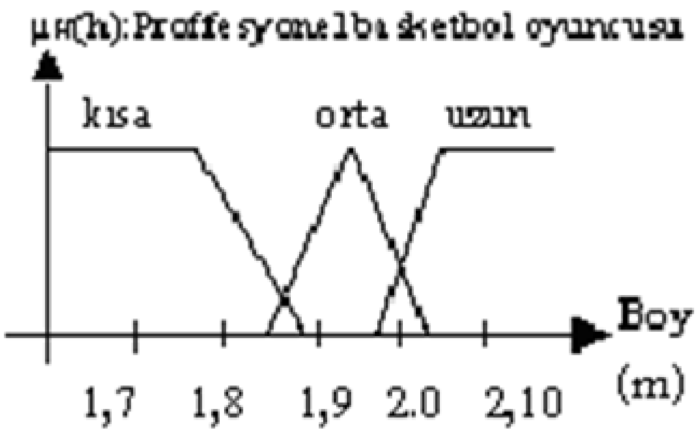


Üyelik Fonksiyonları

Örnek:

Bütün insanların kümesi U olsun. İnsanları boylarına güre gruplandıralım. Aşağıda {kısa boylular, orta boylular, uzun boylular} dan oluşan terimler kümesi için iki ayrı üyelik fonksiyonu gösterilmektedir. Açıkça görülmektedir ki kısa boylu, orta boylu ve uzun boylu, insanların profesyonel basketbol oyuncuları için anlamı diğer insanlara göre olan anlamından daha farklıdır. Bu da göstermektedir ki üyelik fonksiyonları çevreye çok bağlı olabilmektedir.





Üyelik Fonksiyonları

- Üyelik fonksiyonu için çokça kullanılan fonksiyonlar, üçgen, yamuk, parçalı doğrusal fonksiyonlardır.
- Son zamanlara kadar üyelik fonksiyonları kullanıcının tecrübesine göre gelişi güzel seçiliyordu, iki ayrı kullanıcı tarafından belirlenen üyelik fonksiyonları tecrübelerine, kültürlerine, bakış açılarına bağlı olarak oldukça farklı olabilmekte idi.
- Günümüze gelindiğinde ise üyelik fonksiyonları eniyileme işlemleri ile düzenlenebilmektedir.

Bulanık Kümelerle İlgili Terminolojiler

Destek Kümesi :

Üyelik derecesi 0 dan büyük olan elemanların oluşturduğu kümedir.

$$\mu_A(u)>0$$

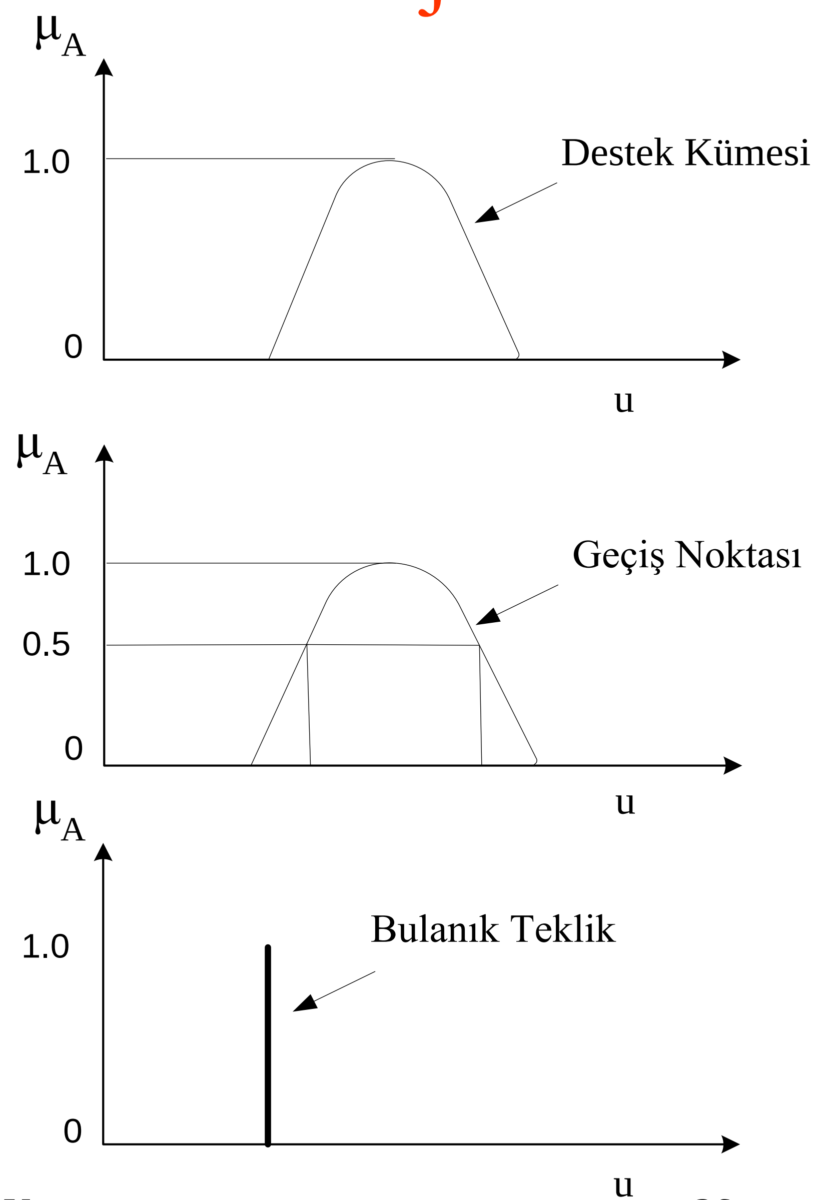
Geçiş Noktası :

A kümesi içinde üyelik değeri 0,5'e eşit olan noktaya geçiş noktası denir.

$$\mu_A(u)=0.5$$

Bulanık Teklik :

U evrensel kümesi içindeki bir bulanık kümenin destek bölgesi tek nokta ise buna bulanık teklik (singleton) denir.

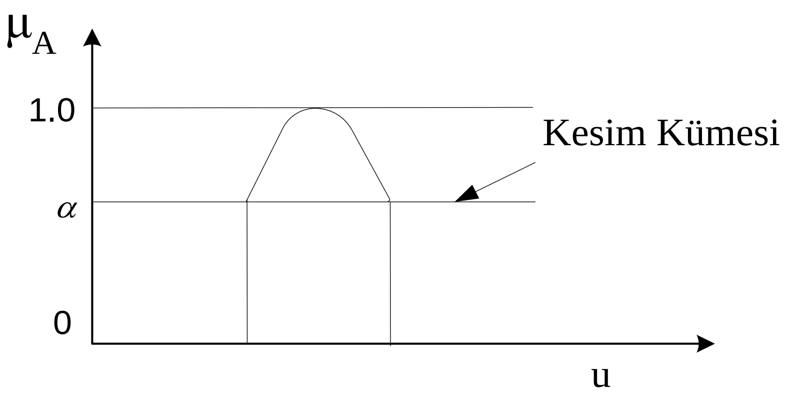


Bulanık Kümelerle İlgili Terminolojiler

Bulanık kümenin α-kesim kümesi :

A kümesi içindeki elemanlardan üyelik derecesi α dan büyük olanların oluşturduğu küme α-kesim kümesidir.

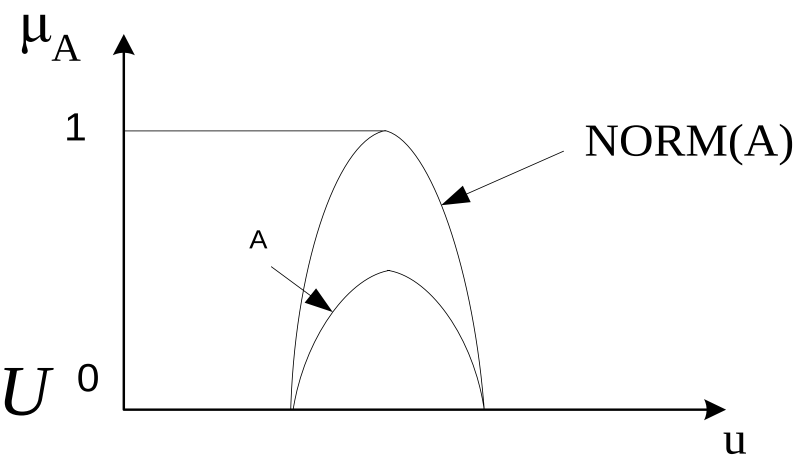
$$\mu_A(u) \geq \alpha$$



Normalizasyon :

Üyelik fonksiyonunun yeniden ölçeklendirilmesidir. Bütün küme elemanlarının üyelik derecelerinin, kümenin en büyük üyelik derecesine bölünmesiyle küme normalize edilir.

$$\mu_{NORM\,(A)} = \mu_A(u) / \max(\mu_A(u)) \forall u \in U$$



Bulanık Kümelerle İlgili Terminolojiler

Bulanık kümenin yüksekliği

Bir bulanık kümede herhangi bir noktada ulaşılan en büyük üyelik değeridir.

Eğer bir bulanık kümenin yüksekliği 1 ise, bu bulanık küme normal bulanık küme olarak adlandırılır.

Bulanık kümenin çekirdeği

Üyelik derecesi 1 olan elemanların oluşturduğu kümeye denir.

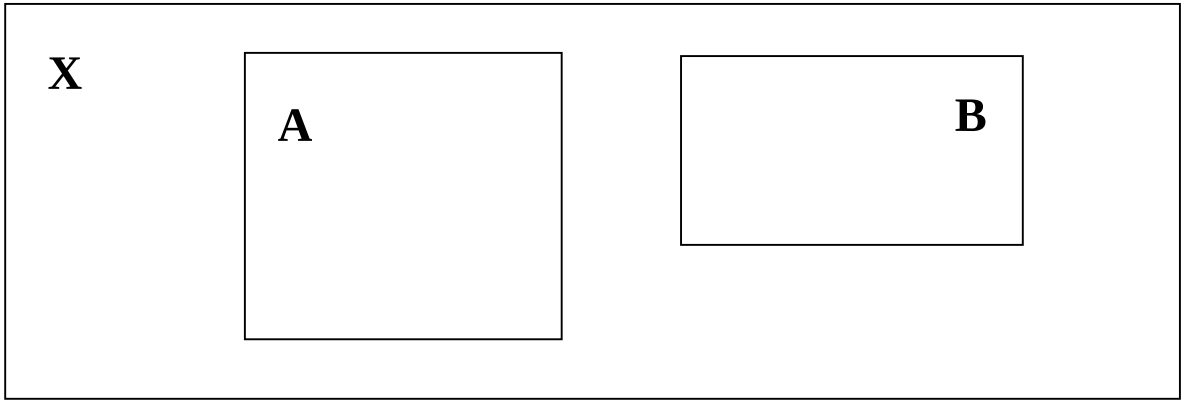
$$\mu_A(u)=1$$

Küme İşlemleri

- Keskin küme işlemleri
- Bulanık küme işlemleri
- Üyelik fonksiyonlarını değiştiren bulanık küme işlemleri
- Bazı ileri bulanık küme işlemleri

Keskin küme işlemleri

- Keskin kümeler üzerinde işlemleri göstermek için Venn Diagramları kullanabiliriz.
- A ve B, X evrensel kümesinde iki küme olsun:



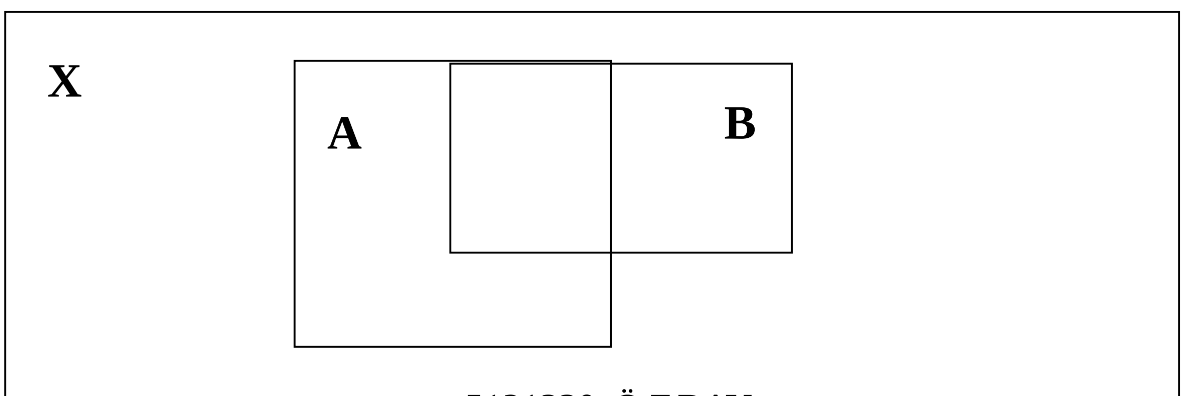
Keskin küme işlemleri

Birleşme :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \, veya \; x \in B\}$$

A ve B’nin birleşimi A∪B şeklinde gösterilir ve A ve B’nin tüm elemanlarını kapsar.

Örneğin;
$\mu A\cup B(x)=1$ eğer $x \in A$ veya $x \in B$ ise,
$\mu A\cup B(x)=0$ eğer $x \notin A$ ve $x \notin B$ ise.



Keskin küme işlemleri

Kesişme :

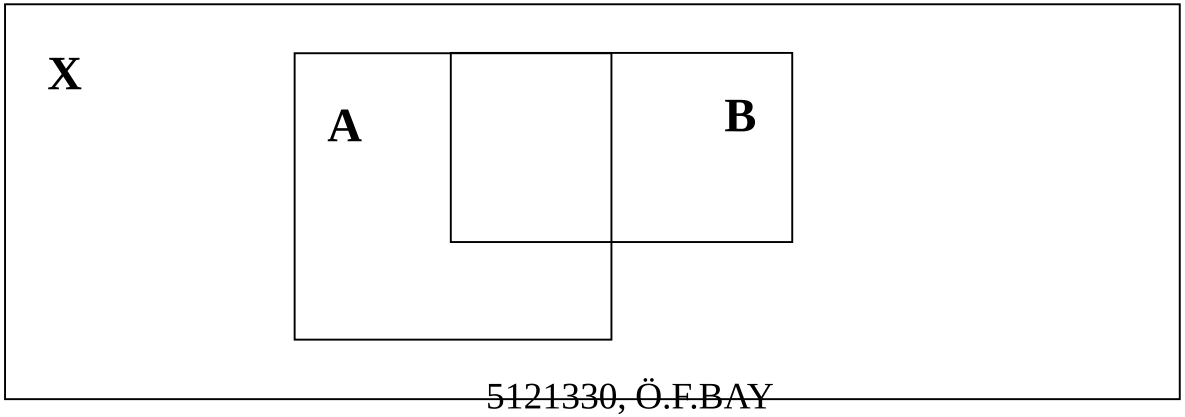
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

A ve B'nin kesişimi $A \cap B$ şeklinde gösterilir ve A ve B' de aynı anda bulunan elemanları kapsar.

Örneğin;

$\mu A \cap B\ (x)=1$ eğer $x \in A$ ve $x \in B$,

$\mu A \cap B(x)=0$ eğer $x \notin A$ veya $x \notin B$ ise.



Keskin küme işlemleri

Tümleme :

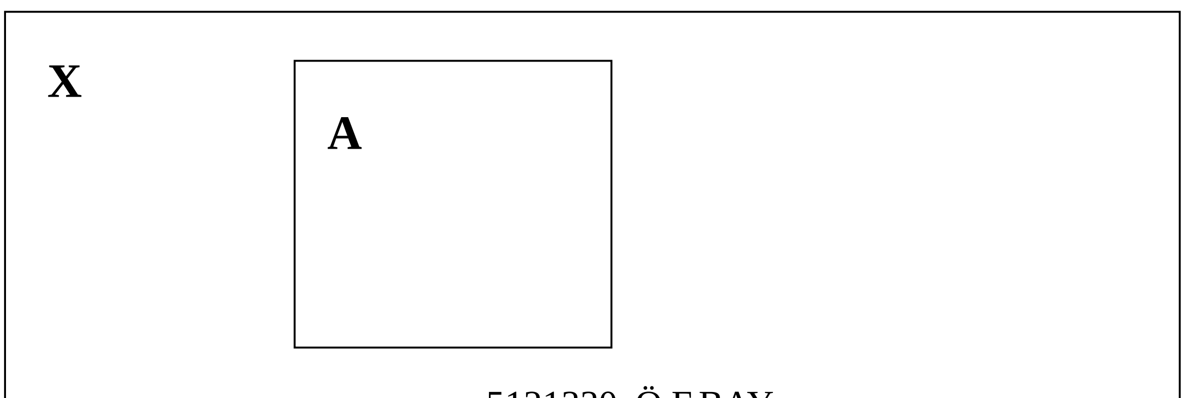
$$\overline{A} = \left\{ x \mid x \notin A \text{ ve } x \in X \right\}$$

A'nın tümleyeni $\overline{\mathrm{A}}$ ile gösterilir ve A'nın içinde olmayan bütün elemanları kapsar.

Örneğin;

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 \quad \text{eğer } x \notin A \text{ ise,}$$

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 0 \quad \text{eğer } x \in A \text{ ise.}$$



Keskin küme işlemleri

Kümelerin Fonksiyonlara Aktarımı

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

- ✓ Burada μ_A(x) evrensel kümedeki x elemanının A kümesine olan üyeliğini ifade eder
- ✓ Buradan aşağıdaki eşitlikler kolayca yazılabilir;

$$A \cup B \Rightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

$$A \cap B \Rightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Keskin küme işlemleri

✓$x \in A$ veya $x \in B$'nin anlamı;

[μA (x)=1, μB(x)=1], [μA (x)=1, μB(x)=0] veya [μA (x)=0, μB(x)=1], ise bu durum max[μA(x), μB(x)]=1 içindir.

✓$x \notin A$ ve $x \notin B$'nin anlamı;

[μA(x)=0, μB(x)=0], ise bu durum max[μA(x), μB(x)]=0 içindir.

✓Dolayısıyla max[μA(x), μB(x)] birleşme için doğru üyelik fonksiyonunu sağlamaktadır

Keskin küme işlemleri

- ✓$\mu A \cup B(x)$, $\mu A \cap B(x)$ ve için verilen formüller kümeler hakkındaki diğer teorik özelliklerin ispatı için çok kullanışlıdır.
- ✓Ayrıca “max” ve “min” sadece $\mu A \cup B(x)$, $\mu A \cap B$ (x)’i tanımlamak için tek yol değildir.
- ✓Bu formüller sadece geleneksel küme teorisinin bir parçası değildir. Bunlar bulanık küme teorisi için de gereklidirler.

Diğer keskin küme işlemleri

Aristotelian Kanunları:

✓ Ayrıcalıklı orta kanunu :

$$A \cup \overline{A} = X$$

Burada X evrensel kümedir.

✓ Zıtlık(çelişme) kanunu :

$$A \cap \overline{A} = \phi$$

Burada ϕ boş kümedir.

Diğer keskin küme işlemleri

De Morgan Kanunları:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

- Bu kanunlar kümelerle ilgili daha karmaşık bir çok işlemin ispatlanmasında oldukça kullanışlıdır.
- De Morgan Kanunları Venn şemaları veya kümeleri fonksiyonlara aktaran işlemler tarafından da ispatlanabilir

Keskin Kümelerin Özellikleri

Değişme Özelliği

(Commutative Law)

$$\left.\begin{aligned} A\cap B &= B\cap A \\ A\cup B &= B\cup A \end{aligned}\right\}$$

Birleşme Özelliği

(Associative Law)

$$\left.\begin{aligned} (A\cap B)\cap C &= A\cap (B\cap C) \\ (A\cup B)\cup C &= A\cup (B\cup C) \end{aligned}\right\}$$

Dağılma Özelliği

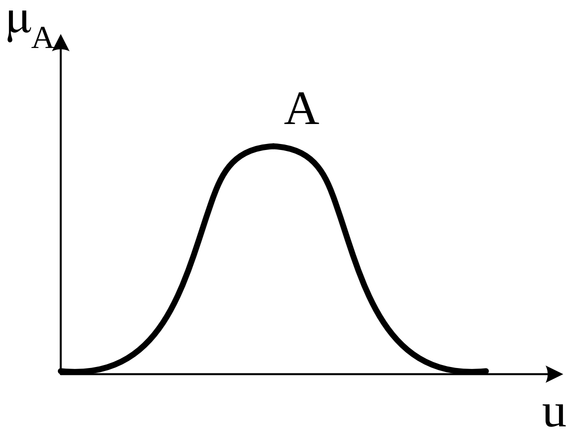
(Distributive Law)

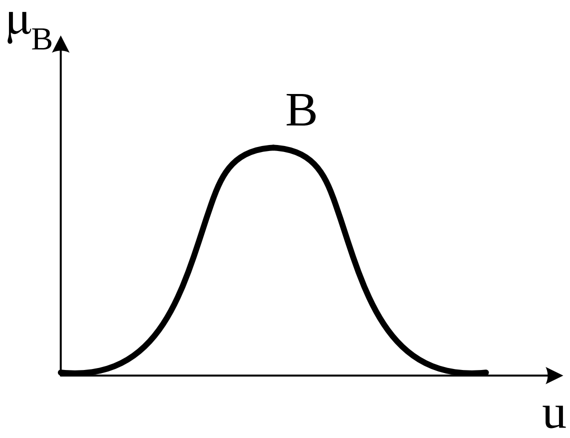
$$\left.\begin{aligned} A\cap (B\cup C) &= (A\cap B)\cup (A\cap C) \\ A\cup (B\cap C) &= (A\cup B)\cap (A\cup C) \end{aligned}\right\}$$

Bu özellikler Venn şemaları veya kümeleri fonksiyonlara aktaran işlemler tarafından da ispatlanabilir

Temel bulanık küme işlemleri

- ✓ Belirsizliklerin sistematik işlenmesinde üyelik fonksiyonlarıyla gerçekleştirilen bulanık küme işlemleri büyük kolaylık sağlarlar.
- ✓ Bulanık mantıkta birleşme, kesişme ve tümleme kümelerin üyelik fonksiyonları terimleri ile tanımlanmaktadır
- ✓ A ve B, U evrensel kümesinde sırasıyla μ_A ve μ_B üyelik fonksiyonuna sahip iki küme olsunlar.





Temel bulanık küme işlemleri

- **<u>Eşitlik :</u>**

İki bulanık küme şayet aynı evrensel kümede iseler ve her ikisi için üyelik fonksiyonları da aynı ise eşittir denir.

$$\because A = B \;\; eger\; \mu_A(u) = \mu_B(u) \;\; \forall u \in U$$

A = 0.3/1 + 0.5/2 + 1/3
B = 0.3/1 + 0.5/2 + 1/3

$A = B$

Temel bulanık küme işlemleri

❑ Kapsama:

Bulanık küme $A \subseteq X$ bir başka bulanık küme, $B \subseteq X$ ‘e dahildir eğer;

$$\mu A(x) \leq \mu B(x),\ \forall x \in X$$

$X = \{1, 2, 3\}$ ve A ve B kümeleri

$A = 0.3/1 + 0.5/2 + 1/3;$

$B = 0.5/1 + 0.55/2 + 1/3$ olsun;

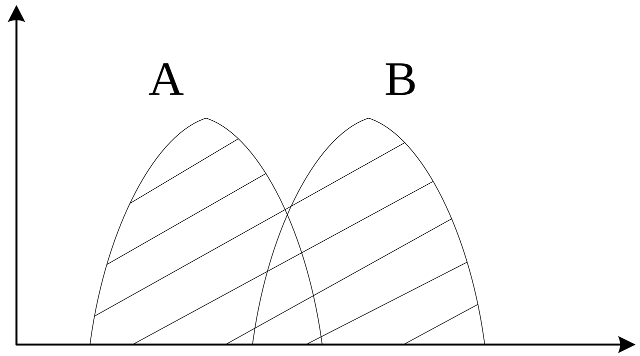
Bu durumda A kümesi B kümesinin alt kümesidir, veya $A \subseteq B$

Temel bulanık küme işlemleri

- **<u>Birleşim :</u>**

  İki bulanık kümenin birleşimi aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile gösterilir.

$$\mu_{A\cup B}(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\} \qquad \forall u \in U$$

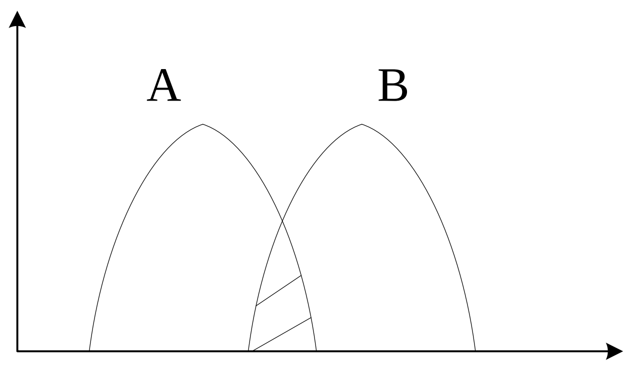


Temel bulanık küme işlemleri

- **Kesişim :**

  İki bulanık kümenin kesişimi aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile gösterilir.

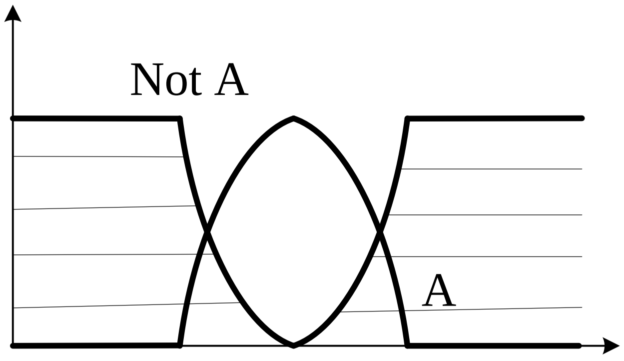
$$\mu_{A\cap B}(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\} \qquad \forall u \in U$$



Temel bulanık küme işlemleri

- **<u>Tümleyen :</u>**

  Normalize edilmiş bulanık A kümesinin tümleyen bulanık kümesi aynı evrensel kümede aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.



$$\mu_{\overline{A}}(u) = 1 - \mu_A(u) \qquad \forall u \in U$$

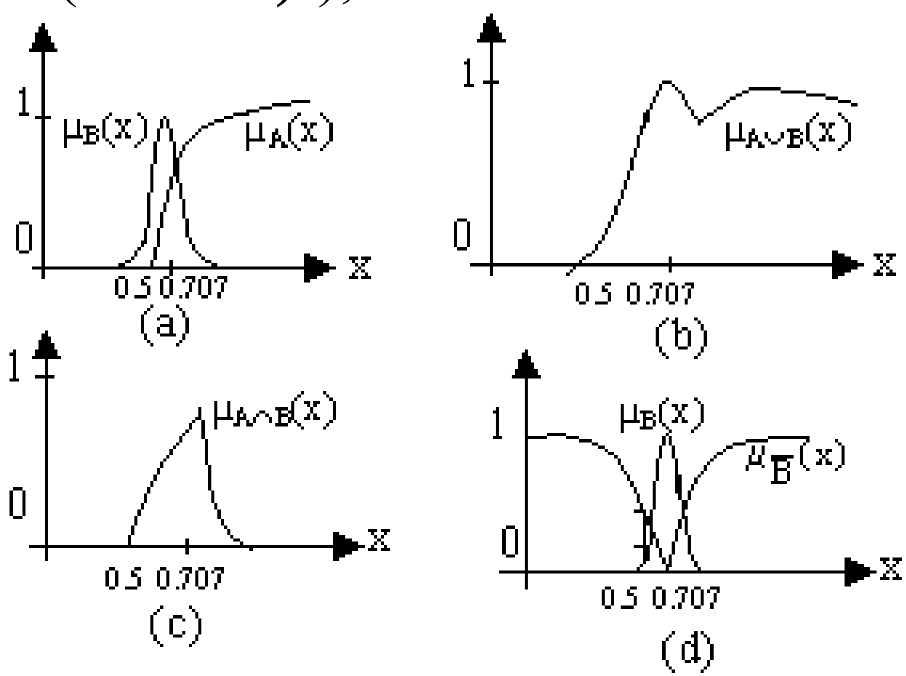
Örnek

✓Bulanık kümelerden A, sönüm oranı 0.5'den büyük ve B kümesi ise sönüm oranı yaklaşık 0.707 olan sistemleri temsil etsin. Burada sönüm oranı pozitif gerçek sayıdır. Sonuç olarak, $A=\{(x,\mu A(x)) \mid x \in U\}$ ve $B=\{(x,\mu B(x)) \mid x \in U\}$

✓ Burada $\mu A(x)$ ve $\mu B(x)$ şu şekilde belirtilebilir:

➢ $\mu A(x)=[0,\ldots.x \leq 0.5]$ veya $[1/(1+(x-0.5)^{-2}),\ldots..x>0.5]$ ve

➢ $\mu B(x)=1/(1+(x-0.707)^{4}),\ldots..x>0.$



Örnek (devam)

- ✓ Şekil'de $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$, $\mu_{A\cup B}(x)$, $\mu_{A\cap B}(x)$, ve $\mu_{\overline{B}}(x)$ gösterilmektedir.
- ✓ Şekil (d)'ye dikkat edilirse x=0.5 noktası farklı üyelik dereceleri ile aynı anda hem *B* kümesinde hem de $\overline{B}$ kümesinde bulunmaktadır.
- ✓ Çünkü $\mu_B(0.5) \neq 0$ ve $\mu_{\overline{B}}(0.5) \neq 0$ dır

✓Bu örnek bulanık kümeleri için *zıtlık kanunu* (law of contradiction) *ve ayrıcalıklı orta kanununun* (law of excluded middle) geçersizliğini göstermektedir.

✓Bulanık kümeler için:

$A \cup \overline{A} \neq U$ ve $A \cap \overline{A} \neq \phi$ dir.

Aslında, bulanık küme kuramı ile keskin küme kuramı arasındaki farkı tanımlamanın bir yolu, bu iki kanunun bulanık küme kuramında geçerli olmadığını açıklamaktır

Üyelik fonksiyonlarını değiştiren bulanık küme işlemleri

- Bulanık kümenin üyelik fonksiyonunun şekli değiştirilebilir.
- Bu, belirli işlemler ile yapılabilir.

- **<u>Kuvvet :</u>**

Şayet p pozitif bir sayı ve A, $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanan bir bulanık küme ise: A nın p kuvveti aşağıdaki gibi tanımlanır:

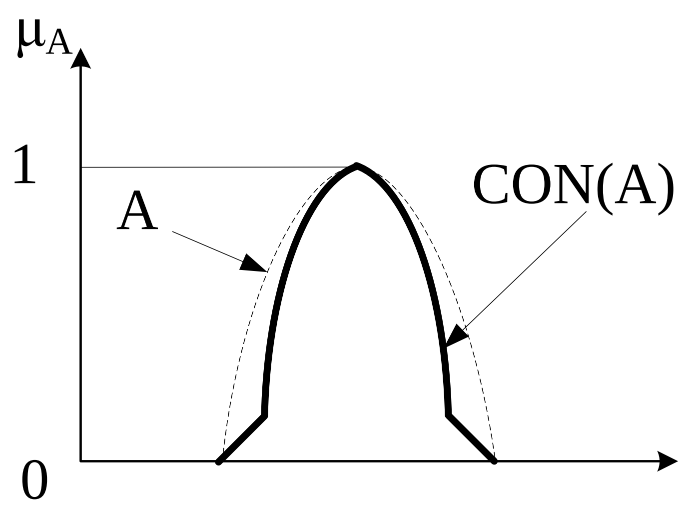
$$A^p = \{(x, \mu_A(x))\}^p = \{(x, (\mu_A(x))^p\}$$

Üyelik fonksiyonlarını değiştiren bulanık küme işlemleri

- **<u>Derişme :</u>** (concentration)

  Bulanık bir küme üyelik fonksiyonu daha yüksek üyelik dereceli elemanlarının üyeliği vurgulanarak değiştirilirse yoğunlaşır.

$$\mu_{CON(A)}(u) = (\mu_A(u))^2 \qquad \forall u \in U$$

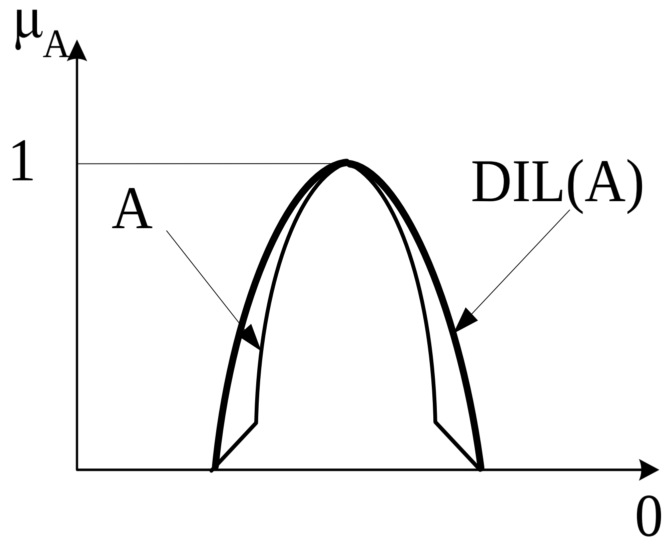


Üyelik fonksiyonlarını değiştiren bulanık küme işlemleri

- **<u>Genişleme :</u>** (dilation)

  Bulanık bir küme üyelik fonksiyonu daha düşük dereceli elemanların önemi artırılarak değiştirilirse genişler.

$$\mu_{DIL(U)}(u) = (\mu_A(u))^{0.5} \qquad \forall u \in U$$

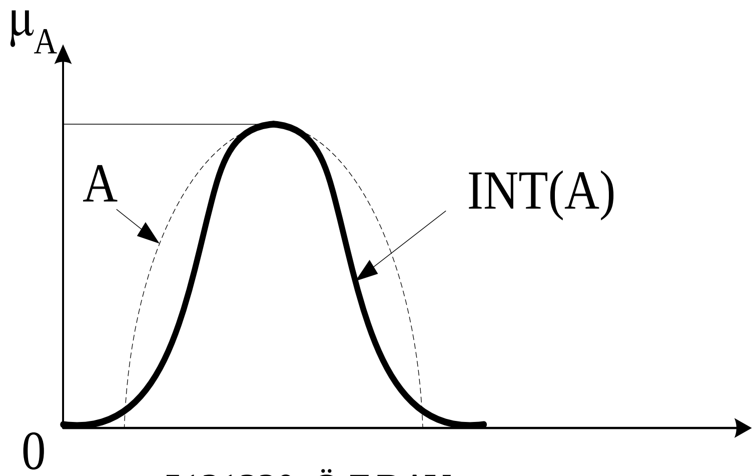


Üyelik fonksiyonlarını değiştiren bulanık küme işlemleri

- **<u>Yoğunlaşma :</u>** (intensification)

  Bu işlem normalize edilmiş bir bulanık kümeyi, üyelik değeri 0.5 den yüksek olan değerleri artırarak ve 0.5 den düşük olan değerleri azaltarak keskin küme olmaya yakınlaştırır.

$$\mu_{INT(A)}(u) = \begin{cases} 2(\mu_A(u))^2 & 0 \le \mu_A(u) \le 0.5 \\ 1 - 2(1 - \mu_A(u))^2 & 0.5 \le \mu_A(u) \le 1 \end{cases}$$



Siz Çözün

Bazı ileri bulanık küme işlemleri

- “**max**” ve “**min**” operatörleri **bulanık birleşme** ve **bulanık kesişmeyi** modellemek için seçilen tek operatörler değildirler

- *bulanık birleşme* operatörlerine t-conorm (⊕) (s-norm) operatörü,
- *bulanık kesişme* operatörlerine t-norm (★) operatörü denir.

Bazı ileri bulanık küme işlemleri

Bulanık Kesişme operatörü

- **Cebirsel Çarpım :**

A ve B bulanık kümelerinin kesişimi, üyelik fonksiyonlarının aşağıda gösterildiği gibi çarpımından oluşur:

$$\mu_{A\cap B}(u) = \mu_A(u)\mu_B(u) \qquad \forall u \in U$$

Bulanık Birleşme operatörü

- **Cebirsel Toplam :**

A ve B bulanık kümelerinin birleşimi aşağıda gösterildiği gibidir

$$\mu_{A\cup B}(u) = \mu_A(u) + \mu_B(u) - \mu_A(u)\mu_B(u) \qquad \forall u \in U$$

Bazı ileri bulanık küme işlemleri

Bazı t-conorm operatörleri :

- **<u>Sınırlı Toplam (Bounded sum):</u>**

  A ve B bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonu ile cebirsel toplamı üyelik fonksiyonu aşağıda gösterilen bulanık kümedir:

$$\mu_{A\oplus B}(u) = \min\{1, \mu_A(u) + \mu_B(u)\} \qquad \forall u \in U$$

Bazı ileri bulanık küme işlemleri

- **<u>Güçlü Toplam (Drastic sum) :</u>**

  A ve B bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonu ile bulanık birleşimi, üyelik fonksiyonu aşağıda gösterilen bulanık kümedir:

$$\mu_{A\oplus B}(u) = \begin{cases} \mu_A(u) & \mu_B(u) = 0 \quad icin \\ \mu_B(u) & \mu_A(u) = 0 \quad icin \\ 1 & \mu_A(u), \mu_B(u) > 0 \quad icin \end{cases}$$

Bazı ileri bulanık küme işlemleri

Bazı t-norm operatörleri :

- **Sınırlı Çarpım (Bounded product) :**

  A ve B bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonu ile sınırlı çarpımı, üyelik fonksiyonu aşağıda gösterilen bulanık kümedir:

$$\mu_{A*B}(u) = \max(0, \mu_A(u) + \mu_B(u) - 1 \qquad \forall u \in U$$

Bazı ileri bulanık küme işlemleri

- **<u>Güçlü Çarpım (Drastic product) :</u>**

  A ve B bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonu ile bulanık kesişimi, üyelik fonksiyonu aşağıda gösterilen bulanık kümedir:

$$\mu_{A*B}(u) = \begin{cases} \mu_A(u) & \mu_B(u) = 1 \quad icin \\ \mu_B(u) & \mu_A(u) = 1 \quad icin \\ 0 & \mu_A(u), \mu_B(u) < 1 \quad icin \end{cases}$$

Temel bulanık küme operatörleri

Bulanık kümeleri bir araya getirmede diğer yollar da bulunmaktadır, *bulanık and*, *bulanık or*, *compensatory and* ve *compansatory or* v.b.

Bulanık kümelerin mühendislik uygulamalarının kullanılan operatörler:

- ✓ Bulanık kesişme için *min* veya *cebirsel çarpım* t-norm'u;
- ✓ Bulanık birleşme için *max* t-conorm'u;
- ✓ Bulanık tümleme için 1-µA(x) üyelik fonksiyonu.