# Bulanık Mantık Denetleyicileri

Bölüm-3

Bulanık İlişkiler

# Bulanık İlişkiler

Bölüm 3 : Ana Başlıkları

- ✓ Bulanık İlişkiler
  - ➢ Kartezyen çarpımı
  - ➢ Bulanık ilişkiler
  - ➢ Bileşim operatörleri

# Bulanık İlişkiler ve Bileşimler

- Kartezyen çarpımı
- Keskin ve Bulanık ilişkiler
- Bilesim operatörleri

# Kartezyen Çarpım :

- İki veya daha fazla küme (bulanık veya keskin) arasındaki ilişkiyi tanımlamak için kullanılır.
- A ve B iki keskin küme olsun. A ve B nin kartezyen çarpımı AxB olarak gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

- Burada eğer A nın m tane elemanı ve B nin n tane elemanı varsa AxB nin mxn tane elemanı olacaktır.

# AYNI ÇARPIM UZAYINDA İLİŞKİLER VE BİLEŞİMLER

**Keskin İlişkiler (Crisp Relations):**

Keskin ilişki iki veya daha fazla kümenin elemanları arasındaki karşılıklı etki veya bağlantıyı, aralarındaki ilişkinin varlık veya yokluğunu temsil eder.

U ve V iki evrensel küme ise;

Burada ikili ilişkiler R(U,V) ile gösterilirler

# Keskin İlişkiler

- İki evrensel kümenin kartezyen çarpımı :

$$U \times V = \{(x, y) \mid x \in U, y \in V\}$$

- Her bir evrensel küme içerisindeki sıralı çift elemanların ilişkisinin gücü μ ile gösterilen karakteristik fonksiyon ile ifade edilir.

Tam ilişki

$$\mu_{U \times V}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in U \times V \\ 0, & (x, y) \notin U \times V \end{cases}$$

İlişki yok

$$R \subset U \times V$$

# Keskin İlişkiler

Örnek 1.

X erkeklerin kümesi olsun,  X={Can, Çetin, Kürşad}

Y kadınların kümesi olsun, Y={Demet, Aybala, Elif}

X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımı 3x3=9 elemanı olan aşağıdaki kümedir.

XxY={(Can, Demet),(Can, Aybala),(Can, Elif), (Çetin, Demet), ………........... (Kürşad, Aybala),(Kürşad, Elif)}

İki küme arasındaki ilişki ”evlilik” ilişkisi olsun

Evlilik ilişkisi R={(Çetin, Demet), (Can, Elif), (Kürşad, Aybala)} olsun

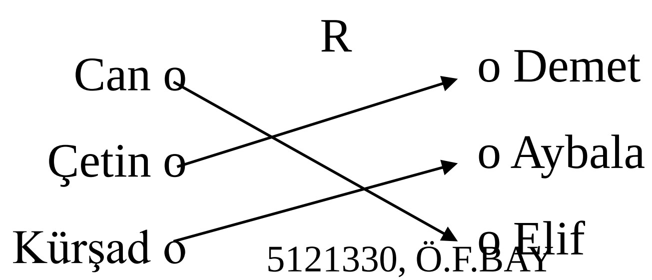
- Bu ilişki tablo şeklinde :

| | Demet | Aybala | Elif |
|---|---|---|---|
| Can | | | x |
| Çetin | x | | |
| Kürşad | | x | |

- Bu ilişki ilişkisel matris şeklinde :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Veya ok diyagramı şeklinde :



# Keskin İlişkiler

- **Örnek 2:**

  İnsan spor ilişkisi

- Aşağıdaki kümeleri varsayalım :

  A={Ahmet, Bahadır, Cem}

  B={Futbol, Hokey, Basketbol, Tenis}

- A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı 3x4=12 elemanı olan aşağıdaki kümedir.

- {(Ahmet, Futbol),(Ahmet, Hokey),(Ahmet, Basketbol),...,(Cem, Tenis)}

- R, kimin hangi sporu yaptığını gösteren bir ilişki olsun:

  Ahmet : Hokey, Basketbol

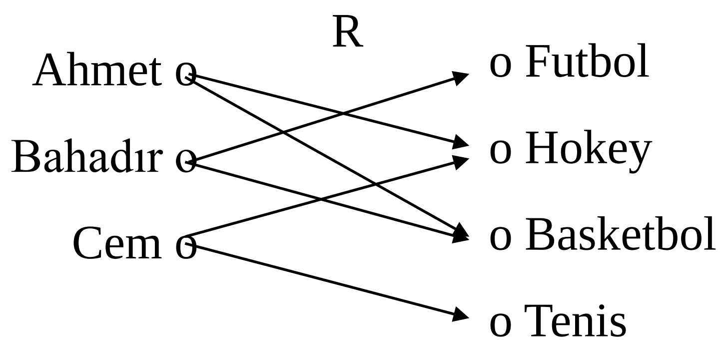
  Bahadır : Futbol, Basketbol

  Cem : Hokey, Tenis

- Bu ilişki tablo şeklinde :

| | Futbol | Hokey | Basketbol | Tenis |
|---|---|---|---|---|
| Ahmet | | x | x | |
| Bahadır | x | | x | |
| Cem | | x | | x |

- Veya ok diyagramı şeklinde :




- AxB kartezyen çarpımı A dan B ye bütün olası ilişkileri kapsar ve diğer alt ilişkiler kartezyen çarpımının alt kümesi kabul edilir.

# Örnek-3

•Bütün lineer ikinci dereceden sürekli zaman sistemler kümesi ile bu sistemlerin kutuplarının kümesi arasındaki kararlılık ilişkisi R ile gösterilsin.

*Lineer ikinci dereceden sürekli zaman sistemler ve bu sistemlerin kutuplarının oluşturacağı muhtemel çiftlerden yalnızca* zamanla *değişmeyen ve kutupları karmaşık* s-düzleminin sol *yarısında veya s-*düzlemin sanal ekseninde olan sistemlerin *kararlı olduğunu* biliyoruz

U={x1,x2}={Lineer ikinci dereceden zamanla değişen sürekli zamanlı sistemler, Lineer ikinci dereceden zamanla değişmeyen sürekli zamanlı sistemler} ve

V={y1,y2,y3}={s-düzleminin sol yarısındaki kutuplar, jω eksenindeki kutuplar, s-düzlemin sağ yarısındaki kutuplar}

# Örnek-3(devam)

- ✓ Kartezyen çarpım U×V, 2×3 dizi çifti gibi düşünülebilir. Örneğin (1-2) elemanı (lineer ikinci dereceden zamanla değişen sürekli zamanlı sistemler, kutuplar $j\omega$ ekseninde) olsun.
- ✓ Kararlılık ilişkisi R(U,V) U×V 'nin alt kümesidir:
- ✓ *R(U,V)={(lineer ikinci dereceden zamanla değişmeyen sürekli zamanlı sistemler, kutupları s-düzleminin sol yarısında), (lineer ikinci dereceden zamanla değişmeyen sürekli zamanlı sistemler, kutupları $j\omega$ ekseninde)}.*

# Örnek-3(devam)

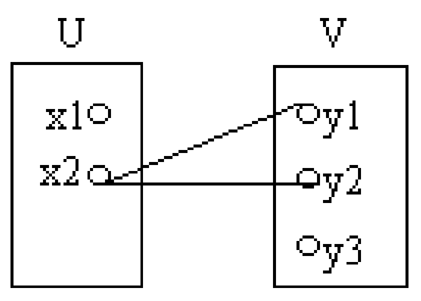
- Keskin ilişki R(U,V) aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile tanımlanabilir:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ancak ve ancak } (x,y) \in R(U,V) \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

- Üyelik fonksiyonlarını elemanları sıfır ve bir olan ilişkisel matriste toplamak uygun olacaktır. Karalılık ilişkisi için ilişkisel matris şu şekilde olacaktır:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Kararlılık ilişkisi için ok diyagramı:



# **Bulanık İlişkiler** (Fuzzy Relations)

Bulanık ilişkiler iki veya daha fazla bulanık kümenin elemanları arasındaki karşılıklı etki ve bağlantıyı aralarındaki ilişkinin varlık veya yokluk derecesini temsil ederler.

Bulanık ilişki örnekleri;

- x y'den daha büyüktür,
- y x'e çok yakındır,
- z y'den daha yeşildir,
- sistem-1 sistem-2'den daha küçük sönümlüdür,
- sistem-A'nın bant genişliği sistem-B'nin bant genişliğinden daha büyüktür.

# **Bulanık İlişkiler** (Fuzzy Relations)

U ve V iki evrensel küme olsun.

Bir bulanık ilişki R(U,V) $U \times V$ çarpım uzayında bir bulanık kümedir.

Örneğin R(U,V) $U \times V$ 'nin bir bulanık alt kümesidir ve üyelik fonksiyonu $\mu R(x,y)$ ile temsil edilir. Burada $x \in U$ ve $y \in V$ 'dir.

$R(U,V) = \{((x,y),\mu R(x,y)) \mid (x,y) \in U \times V\}$ dir.

Bulanık ilişkide; $\mu R(x,y) \in [0,1]$ 'dir,

Keskin ilişkide; $\mu R(x,y)=0$ veya $\mu R(x,y)=1$ 'dir.

# **Bulanık İlişkiler** (Fuzzy Relations)

- n' ninci bir bulanık ilişki $U_1 x \ldots . x U_n$ kartezyen çarpımının bulanık alt kümesidir.

- Aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$R_U = \{((u_1,...,u_n), \mu_R(u_1,...,u_n)) \mid (u_1,...,u_n) \in U_1 \times ... \times U_n\}$$

Burada $U = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$

Genellikle n=2 dir.

# **Bulanık İlişkiler** (Fuzzy Relations)

- A dan B ye bulanık bir ikili ilişki olan R gerçekte AxB nin bir alt kümesidir.

$$R_U = \{(a,b), \mu_R(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$
$$= \bigcup_{A \times B} \{(a,b), \mu_R(a,b)\}$$

- Burada $\mu_R(a,b)$ R nin üyelik fonksiyonunu ve $\bigcup_{A \times B}$ de AxB üzerinde {(a,b)|μR(a,b)} tek yanlı bileşimi temsil eder.

- A ve B sonlu ve keskin, ve |A|=m ve |B|=n, olduğunda

$$R = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \{(a,b), \mu_R(a,b)\}$$

# Bulanık İlişkiler

- R, matris elemanlarının yerine μR(a,b) koyarak dikdörtgen bir tablo gibi ilişkisel matris adıyla gösterilebilir.

$$R = \begin{bmatrix} \mu_R(a_1, b_1) & \dots & \mu_R(a_1, b_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu_R(a_m, b_1) & \dots & \mu_R(a_m, b_n) \end{bmatrix}$$

- Özellikle A=B olduğunda kartezyen çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$A \times A = \{(a,b) \mid a,b \in A\}$$

ve A da ki bulanık ilişki AxA nın bir alt kümesidir.

# **Bulanık İlişkiler** Örnek

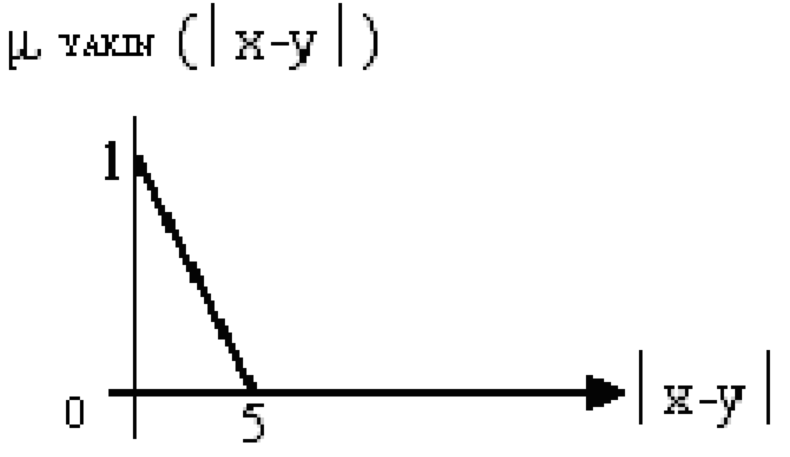
U ve V gerçek sayılar olsun,

bulanık ilişki; “hedef x hedef y ’ye yakın” olsun.

Bu ilişki için üyelik fonksiyonu:

μYAKIN(│x-y│)=max[(5-│x-y│)/5,0].

İki hedef arasındaki uzaklık │x-y│ bağımsız değişken olarak davranmaktadır, bu ise onu iki boyutlu üyelik fonksiyonu olarak göstermeyi mümkün kılar.



# Bulanık İlişkiler

- **Örnek :**

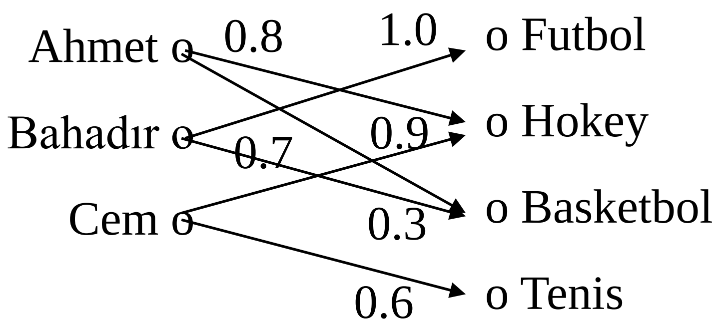
  İnsan Spor ilişkisi (Bulanık ilişki)

  İlişki matris'i aşağıdaki gibi verilsin :

| | Futbol | Hokey | Basketbol | Tenis |
|---|---|---|---|---|
| Ahmet | 0 | 0.8 | 0.7 | 0 |
| Bahadır | 1.0 | 0 | 0.3 | 0 |
| Cem | 0 | 0.9 | 0 | 0.6 |

# Bulanık İlişkiler

- İnsan Spor ilişkisinin (Bulanık ilişki) grafik gösterilimi aşağıdaki gibidir :



# Bulanık İlişkiler ile İşlemler

Bulanık ilişkiler çarpım uzayında bulanık kümeler olduğu için, bulanık birleşme, kesişme ve tümleme işlemleri için kullanılan operatörleri kullanarak kuramsal ve cebirsel küme işlemleri bulanık ilişkiler için de tanımlanabilir.

R(x,y) ve S(x,y) aynı çarpım uzayı U×V ’de iki bulanık ilişki olsun. İki ilişkinin bileşimi olan R ve S ‘nin kesişimi ve birleşimi, aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır :

$$\mu_{R\cap S}(x, y) = \mu_R(x, y) * \mu_S(x, y)$$

$$\mu_{\mathrm{R}\cup \mathrm{S}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mu_{\mathrm{R}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \oplus \mu_{\mathrm{S}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

burada ★ herhangi bir *t-norm* ve ⊕ ise herhangi bir *t-conorm* ’dur

# Bulanık İlişkiler ile İşlemler

R ve S, XxY kartezyen çarpım uzayında bulanık ilişkiler olsun ve aşağıdaki işlemleri uygulansın :

- **Birleşim :** $\mu_{R \cup S}(x, y) = \max\{\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)\}$
- **Kesişim :** $\mu_{R \cap S}(x, y) = \min\{\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)\}$
- **Tümleyen :** $\mu_{\overline{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$
- **Kapsayan :** $R \subset S \Rightarrow \mu_R(x, y) \leq \mu_S(x, y)$

# Bulanık İlişkiler: Örnek

Bileşim cümlesi

"x y'den daha büyüktür ve y x'e çok yakındır"

Bu cümle; " x y'den daha büyüktür " ve " y x'e çok yakındır" cümlelerinden oluşan iki ilişki arasında bir bileşimdir.

Bu iki ilişki'de aynı çarpım uzayı $U \times V$ 'de bulunmaktadır.

"x y'den daha büyüktür" ilişkisi için $\mu DB(x,y)$ ve

"y x'e çok yakındır" ilişkisi için $\mu ÇY(y,x)$ ) oluşturalım.

Bu üyelik fonksiyonlarını ve uygun t-normu (örneğin min) kullanarak bu cümle için şu şekilde bir üyelik fonksiyonunu oluşturabiliriz:

$$\mu DB \cap ÇY(x,y) = \min [\mu DB(x,y) , \mu ÇY(y,x)]$$

# Bulanık İlişkiler: Örnek (devam)

U={x1,x2,x3} ve V={y1,y2,y3,y4} olsun.

μDB(x,y) ve μÇY(y,x) üyelik fonksiyonlarının aşağıdaki şekilde ilişkisel matrisle verildiğini farzedelim:

$$\mu_{\mathrm{DB}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathrm{y1} & \mathrm{y2} & \mathrm{y3} & \mathrm{y4} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{x1} \\ \mathrm{x2} \\ \mathrm{x3} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

ve

$$\mu_{CY}(\mathrm{y},\mathrm{x}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathrm{x1} & \mathrm{x2} & \mathrm{x3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{y1} \\ \mathrm{y2} \\ \mathrm{y3} \\ \mathrm{y4} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.9 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Bulanık İlişkiler: Örnek (devam)

μDB∩CY(x3,y4) = min[μDB(x3,y4),μCY(y4,x3)] = min(0.8,0.5) = 0.5

μDB∩CY(x,y) üyelik fonksiyonunun tamamı aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\mu_{DB\cap CY} = \begin{array}{c} \\ x1 \\ x2 \\ x3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y1 & y2 & y3 & y4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.1 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matris'e dikkatli bakıldığında elemanlarının çoğunun 0,5'ten küçük olduğu görülmektedir. Bu cümle (x1,y4) ve (x3,y3) ihtimalleri haricinde yüksek dereceden güvensizlik göstermektedir

# FARKLI ÇARPIM UZAYINDA İLİŞKİLER VE BİLEŞİMLER

**Keskin Bileşimler** (Crisp Compositions):

•Burada ortak bir kümeyi paylaşan P(U,V) ve Q(V,W) olarak isimlendirilen kümelerin farklı çarpım uzaylarında keskin ilişkiler bileşimi dikkate alınacaktır.

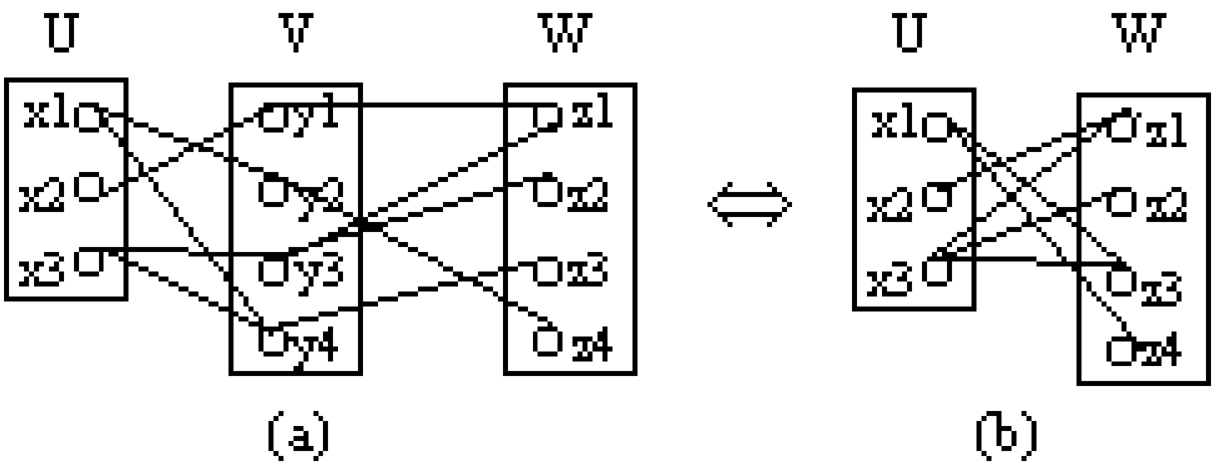
•Klir ve Folger ’e göre bu iki ilişkinin bileşimi aşağıdaki gibi gösterilmekte

$$R(U,W) = P(U,V) \circ \mathrm{Q(V,W)}$$

ve R(U,W) ,UxW ’nin alt kümesi olarak tanımlanmaktadır, öyle ki $(x,z) \in R$ ancak ve ancak en az bir tane $y \in V$, öyle ki $(x,y) \in P$ ve $(y,z) \in Q$.

# Keskin Bileşimler Örnek

Şekil'de gösterilen ok diyagramını dikkate alarak,
R1(U,V), R2(V,W) ve R3(U,W) ilişkisel matrisleri elde edelim



# Keskin Bileşimler Örnek (devam)

Şekil'de gösterilen ok diyagramını dikkate alarak,

R1(U,V), R2(V,W) ve R3(U,W) ilişkisel matrisleri elde edelim

$$R_1(U,V) = \begin{array}{c} \\ x1 \\ x2 \\ x3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y1 & y2 & y3 & y4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$R_2(V,W) = \begin{array}{c} \\ y1 \\ y2 \\ y3 \\ y4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z1 & z2 & z3 & z4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$R_3(U,W) = \begin{array}{c} \\ x1 \\ x2 \\ x3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z1 & z2 & z3 & z4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Keskin Bileşimler

Ok diyagramlarla bileşimleri tanımlamak yeterli olmadığı için aynı bilgileri taşıyan bir formüle ihtiyaç bulunmaktadır.

P(U,V) ve Q(V,W) ilişkilerinin max-min bileşimi, μPoQ(x,z) üyelik fonksiyonu ile tanımlanmaktadır, burada,

$$\mu_{P \circ Q}(x,z) = \left\{ (x,z), \max_{y}[\min(\mu_P(x,y), \mu_Q(y,z))] \right\}$$

P(U,V) ve Q(V,W) ilişkilerinin max çarpım bileşimi, μP×Q(x,z) üyelik fonksiyonu ile tanımlanmaktadır, burada,

$$\mu_{P \times Q}(x,z) = \left\{ (x,z), \max_{y}[\mu_P(x,y)\mu_Q(y,z)] \right\}$$

Aslında, max-min veya max-product bileşim işlemleri yapılarak doğru ilişkisel matris R(U,W) elde edilmektedir.

# Keskin Bileşimler Örnek

İlişkisel matriste R3(U,W)' nin (1-2) elemanı için önerilen formülleri doğrularsak.

Max-min kullanıldığında;

$\mu R3(x1,z2) = \{(x1,z2), \max_y[\min(\mu R1(x1,y),\mu R2(y,z2))]\}$

$= \{(x1,z2), \max[\min(\mu R1(x1,y1),\mu R2(y1,z2)),$

$\min(\mu R1(x1,y2),\mu R2(y2,z2)),$

$\min(\mu R1(x1,y3),\mu R2(y3,z2)),$

$\min(\mu R1(x1,y4),\mu R2(y4,z2))]\}$

$= \{(x1,z2), \max[\min(0,0, \min(1,0), \min(0,1), \min(1,0)]\}$

$= \{(x1,z2),\max[0,0,0,0] = 0\},$

bu ise ilişkisel matris ile uyumludur.

# Keskin Bileşimler Örnek

İlişkisel matriste R3(U,W)' nin (1-2) elemanı için önerilen formülleri doğrularsak.

Max-çarpım kullanıldığında;

$\mu R3(x1,z2) = \{(x1,z2), \max_y[(\mu R1(x1,y).\mu R2(y,z2)]\}$

$= \{(x1,z2), \max[\mu R1(x1,y1).\mu R2(y1,z2),$

$\mu R1(x1,y2).\mu R2(y2,z2),$

$\mu R1(x1,y3).\mu R2(y3,z2),$

$\mu R1(x1,y4).\mu R2(y4,z2)]\}$

$= \{(x1,z2), \max[(0x0), (1x0), (0x1), (1x0)]\}$

$= \{(x1,z2), \max[0,0,0,0] = 0\},$

bu ise ilişkisel matris ile uyumludur.

# Keskin Bileşimler

**Kestirme yollar**

**Max-Min Bileşimi:**

- Matris  çarpımı Q(U,V) ve P(V,W)'daki her bir eleman yazılır,
- Her bir çarpma min işlemi olarak ele alınır ve
- Her bir toplama max işlemi gibi ele alınır.

**Max-Çarpım Bileşimi:**

- Matris  çarpımı Q(U,V) ve P(V,W)'daki her bir eleman yazılır,
- Her bir çarpma cebirsel çarpma işlemi olarak ele alınır ve
- Her bir toplama max işlemi gibi ele alınır.

# Kestirme yollar **<u>Örnek</u>**

Keskin Bileşimler örneğindeki R3(U,W)'nin 1-3 elemanı için:

**Max-Min Bileşimi:**

$R3(x1,z3) = 0\times0 + 1\times0 + 0\times0 + 1\times1$

$= \min(0,0) + \min(1,0) + \min(0,0) + \min(1,1)$

$= \max(0,0,0,1) = 1$

**Max-Çarpım Bileşimi:**

$R3(x1,z3) = 0\times0 + 1\times0 + 0\times0 + 1\times1$

$= (0x0) + (1x0) + (0x0) + (1x1)$

$= \max(0,0,0,1) = 1$

# **Bulanık Bileşimler** (Fuzzy Compositions)

Ortak bir kümeyi paylaşan R(U,V) ve S(V,W) olarak isimlendirilen kümelerin farklı çarpım uzaylarında bulanık ilişkiler bileşimi dikkate alınacaktır.

Örneğin "x daha büyük y ve y çok yakın z" farklı çarpım uzaylarında ortak bir kümeyi paylaşan bulanık ilişkiler bileşimi keskin bileşimle benzer şekilde tanımlanmaktadır.

Ancak bulanık bileşimde kümeler de bulanıktır.

Bulanık ilişki R 'nin üyelik fonksiyonu $\mu R(x,y)$, $\mu R(x,y) \in [0,1]$

Bulanık ilişki S 'nin üyelik fonksiyonu $\mu S(y,z)$, $\mu S(y,z) \in [0,1]$.

R ve S ayrık evrensel kümelerde olduğunda RoS şeklinde gösterilen R ve S 'nin bulanık bileşimi, ya ok diyagramları tarafından ya da bir bulanık ilişkisel matrisle tanımlanabilir.

# **Bulanık Bileşimler** (Fuzzy Compositions)

İlişkilerin bileşiminde kullanılan formüller μRoS(x,z) ile ifade edilebilir.

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in V} \left[ \mu_R(x, y) * \mu_S(y, z) \right]$$

R ve S ‘nin sup-star bileşimi olarak söylenir.

U, V ve W ayrık evrensel kümeler olduğunda sup işlemi maksimumdur (max).

t-norm için kısa ad olan “star” işlemi keskin max-min ve max-çarpım bileşiminden gelmektedir, çünkü min ve çarpım her ikisi de t-norm’dur.

En çok kullanılan sup-star bileşimleri; sup-min ve sup-çarpım‘dır.

# Bulanık Bileşimler **Örnek**

“ x daha büyük y ve y çok yakın z” cümlesini dikkate alalım.

” x daha büyük y ” ilişkisi için μDB(x,y) üyelik fonksiyonunu
“ y çok yakın z “ ilişkisi için μÇY(y,z) üyelik fonksiyonunu oluşturalım.

$$\mu_{\text{DB}}(x,y) = \begin{array}{c} \\ x1 \\ x2 \\ x3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y1 & y2 & y3 & y4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mu_{\text{ÇY}}(y,z) = \begin{array}{c} \\ y1 \\ y2 \\ y3 \\ y4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z1 & z2 & z3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.9 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Bulanık Bileşimler **Örnek**

max-min bileşimi kullanılarak aşağıdaki ilişkisel matris bulunur:

$$\mu_{DBoÇY}(x,z) = \begin{array}{c} \\ x1 \\ x2 \\ x3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z1 & z2 & z3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.7 & 0.9 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$$

max-çarpım bileşimi kullanıldığında aşağıdaki ilişkisel matris elde edilir:

$$\mu_{DB\times ÇY}(x,z) = \begin{array}{c} \\ x1 \\ x2 \\ x3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z1 & z2 & z3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.42 & 0.72 & 0.35 \\ 0 & 0.32 & 0 \\ 0.63 & 0.81 & 0.56 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Bulanık Bileşimler

## **Örnek :** Max-min tabanlı bileşim işlemi

- Bulanık bilgi tabanlı sistemlerde bileşim operatörleri bulanık ilişki denklemi kurmakta önemli bir rol oynar. Temelde bileşim işlemleri bir ilişkiyi başka bir ilişkiye uygulamada net bir etki yaparlar. Bir çok uygulamada max-min operatörü tercih edilmektedir.

- P ve Q aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun.

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.9 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Max-min bileşim işlemi uygulandığında R ilişkisi :

$$R = P \circ Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \end{bmatrix}$$

Burada :

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \max\{\ \min(0.1,0.3),\min(0.5,0.7)\} \\
&= \max\{0.1,0.5\} \\
&= 0.5 \\
R_{12} &= \max\{\ \min(0.1,0.6),\min(0.5,0.5)\} \\
&= \max\{0.1,0.5\} \\
&= 0.5 \\
R_{13} &= \max\{\ \min(0.1,0.8),\min(0.5,0.4)\} \\
&= \max\{0.1,0.5\} \\
&= 0.4 \\
R_{21} &= \max\{\ \min(0.6,0.3),\min(0.9,0.7)\} \\
&= \max\{0.3,0.7\} \\
&= 0.7 \\
R_{22} &= \max\{\ \min(0.6,0.6),\min(0.9,0.5)\} \\
&= \max\{0.6,0.5\} \\
&= 0.6 \\
R_{23} &= \max\{\ \min(0.6,0.8),\min(0.9,0.4)\} \\
&= \max\{0.6,0.4\} \\
&= 0.6
\end{aligned}
$$

# Bulanık Bileşimler

## Örnek :

- R ve S iki bulanık ilişki olsun:

| R | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.4 | 0.6 | 0 |
| $x_2$ | 0.9 | 1 | 0.1 |

| S | $z_1$ | $z_2$ |
|---|---|---|
| $y_1$ | 0.5 | 0.8 |
| $y_2$ | 0.1 | 1 |
| $Y_3$ | 0 | 0.6 |

- Burada hedef hem Max-min hem de Max-çarpım bileşim kurallarını kullanarak R$^o$S yi hesaplamaktır.

# Max-Min Bileşimi

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 1 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

max{min(0.4,0.5), min(0.6, 0.1), min(0, 0)}

= max{ 0.4, 0.1, 0} = 0.4

max{min(0.4,0.8), min(0.6, 1), min(0, 0.6)}

= max{ 0.4, 0.6, 0} = 0.6

max{min(0.9,0.5), min(1, 0.1), min(0.1, 0)}

= max{ 0.5, 0.1, 0} = 0.5

max{min(0.9,0.8), min(1, 1), min(0.1, 0.6)}

= max{ 0.8, 1, 0.1} = 1

# Max-Çarpım Bileşimi

$$RoS = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 1 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.45 & 1 \end{bmatrix}$$

max{0.4 0.5, 0.6 0.1, 0 0} = max{0.2, 0.06, 0} = 0.2

max{0.4 0.8, 0.6 1, 0 0.6} = max{0.32, 0.6, 0} = 0.6

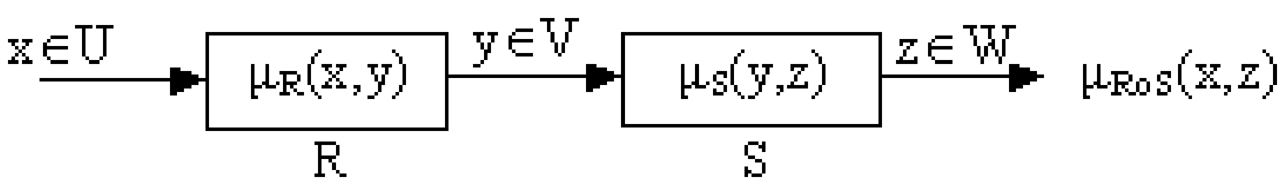
max{0.9 0.5, 1 0.1, 0.1 0} = max{0.45, 0.1, 0} = 0.45

max{0.9 0.8, 1 1, 0.1 0.6} = max{0.72, 1, 0.06} = 1

# Bulanık Bileşimler **Örnek**

Dikkat edilirse keskin bileşim durumlarında max-min veya max-product bileşimleri kullanıldığında her ikisinden de aynı sonuçlar elde edilmektedir. Ancak aynı sonuçlar bulanık bileşim durumunda elde edilememektedir. Bu bulanık bileşim ile keskin bileşim arasındaki ana farktır

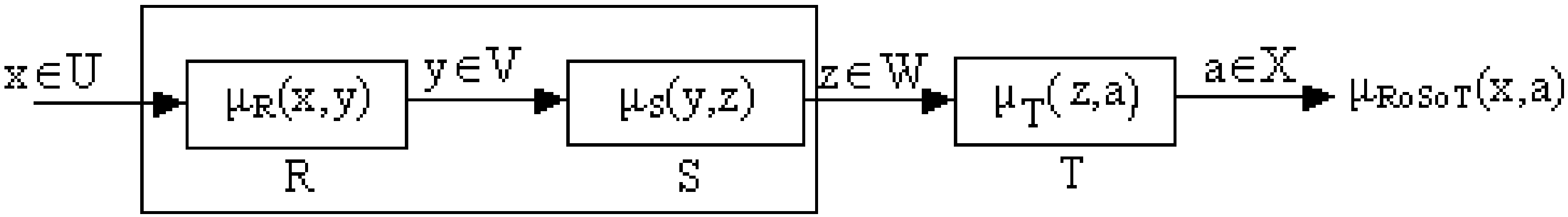
Aşağıda Sup-star bileşiminin blok diyagram yorumu görülmektedir. Bu diyagram hem keskin hem de bulanık bileşimler için geçerlidir.

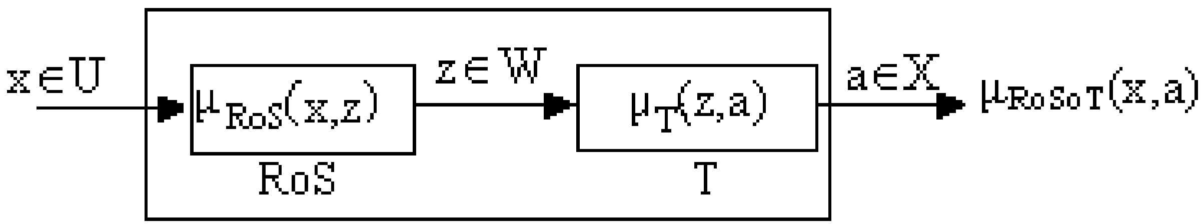



Karmaşık bulanık ilişkileri bileştirmek için basit bir yoldur

# Bulanık Bileşimler **Blok Diyagram Gösterimi**

**Örnek :** Çoklu bulanık ilişkilerin ikili bloklar haline indirgenmesi




Üç bulanık ilişkinin bağlantısı ve bunların bir araya getirilmesi.

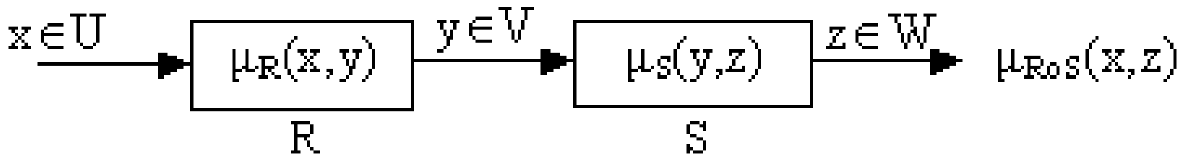
İlk ilişkiler R ve S sup-star bileşimi kullanılarak birleştirilmekte sonra elde edilen sonuç ilişki T ile yine S sup-star bileşimi kullanılarak birleştirilmektedir. (ilk olarak S ve T ilişkileri birleştirilip sonra elde edilen sonuç R ile birleştirilebilir.)

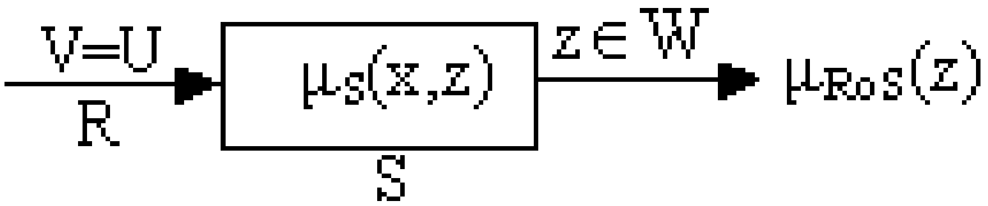
# Blok Diyagram Gösterimi **<u>Örnek :</u>**

Bulanık ilişki R'nin bir bulanık küme olduğunu varsayalım, öyle ki μR(xy)'sadece μR(x) olsun ,

" y orta büyüklüktedir ve z y 'den daha küçüktür".

Bu durumda V=U 'dur




Üstteki blok diyagram alttaki blok diyagrama indirgenir.

Bu da bize bir bulanık kümenin nasıl bir bulanık ilişkiye dönüştürülebileceği fikrini verir.

Bu özel durum bulanık çıkarım olarak adlandırılır ve bulanık mantık sistemlerinin geliştirilmesinde büyük önem arz etmektedir

# Bulanık Bileşimler **Blok Diyagram Gösterimi**

**YORUM :**

V=U olduğu durumda, sup-star bileşimi aşağıdaki hale gelmektedir:

$$\mathrm{Sup}_{y\in V}[\mu R(x,y) \star \mu S(y,z)] = \mathrm{Sup}_{x\in U}[\mu R(x) \star \mu S(x,z)]$$

Bu ise sadece çıkış değişkeni z‘nin bir fonksiyonudur.

Buradan μRoS(x,z)’yi μRoS(z) ’ye indirgeyebiliriz,

Böylece R sadece bulanık bir küme olduğu zaman, μRoS(z) aşağıdaki şekli alır:

$$\mu_{R\circ S}(z) = \sup_{x\in U}\left[\mu_R(x) * \mu_S(x,z)\right]$$

# Bulanık Bileşimler **Blok Diyagram Gösterimi**

V=U durumunda;

Ayrık evrensel kümeler için daha önce bahsedilen kestirme yolları kullanılabilir.

Ancak önce μR(x) için bir sıra matrisi oluşturulmalıdır.

Örneğin, eğer $x \in U$ ve $U = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$ ise,

$R(U) = \{\mu R(x_1), \mu R(x_2), \ldots\ldots, \mu R(x_n)\}$ olsun.

**Kestirme Yol**

Max-Min Bileşimi:

Matris çarpımı R(U) ve S(U,W) 'deki her bir eleman yazılır,

Her bir çarpma min işlemi olarak ele alınır ve

Her bir toplama max işlemi gibi ele alınır.

Max-Çarpım Bileşimi:

Matris çarpımı R(U) ve S(U,W) 'deki her bir eleman yazılır,

Her bir çarpma cebirsel çarpma işlemi olarak ele alınır ve

Her bir toplama max işlemi gibi ele alınır.

# Bulanık Bileşimler

## Örnek (V=U):

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,6 & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} -1 & -0,3 & 0 \\ -0,3 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,3 & 1 \\ 0,3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0,3 \end{bmatrix}$$

$$O = I \circ R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,6 & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -0,3 & 0 \\ -0,3 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,3 & 1 \\ 0,3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Sup-min (max-min)

$$O = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Sup-çarpım (max-çarpım)

$$O = \begin{bmatrix} 0,12 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$