

Bulanık Mantık Denetleyicileri

Bölüm-3 Bulanık İlişkiler

Bulanık İlişkiler

Bölüm 3 : Ana Başlıkları

- ✓ Bulanık İlişkiler
 - Kartezyen çarpımı
 - Bulanık ilişkiler
 - Bileşim operatörleri

Bulanık İlişkiler ve Bileşimler

- Kartezyen çarpımı
- Keskin ve Bulanık ilişkiler
- Bilesim operatörleri

Kartezyen Çarpım :

- İki veya daha fazla küme (bulanık veya keskin) arasındaki ilişkiyi tanımlamak için kullanılır.
- A ve B iki keskin küme olsun. A ve B nin kartezyen çarpımını $A \times B$ olarak gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

- Burada eğer A nın m tane elemanı ve B nin n tane elemanı varsa $A \times B$ nin $m \times n$ tane elemanı olacaktır.

AYNI ÇARPIM UZAYINDA İLİŞKİLER VE BİLEŞİMLER

Keskin İlişkiler (Crisp Relations):

Keskin ilişki iki veya daha fazla kümenin elemanları arasındaki karşılıklı etki veya bağlantıyı, aralarındaki ilişkinin varlık veya yokluğunu temsil eder.

U ve V iki evrensel küme ise;

Burada ikili ilişkiler $R(U, V)$ ile gösterilirler

Keskin İlişkiler

- İki evrensel kümenin kartezyen çarpımı :

$$U \times V = \{(x, y) \mid x \in U, y \in V\}$$

- Her bir evrensel küme içerisindeki sıralı çift elemanların ilişkisinin gücü μ ile gösterilen karakteristik fonksiyon ile ifade edilir.

$$\mu_{U \times V}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in U \times V \\ 0, & (x, y) \notin U \times V \end{cases}$$

Tam ilişki

İlişki yok

$$R \subset U \times V$$

Keskin İlişkiler

Örnek 1.

X erkeklerin kümesi olsun, $X = \{\text{Can, Çetin, Kürşad}\}$

Y bayanların kümesi olsun, $Y = \{\text{Demet, Aybala, Elif}\}$

X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımı $3 \times 3 = 9$ elemanı olan aşağıdaki kümedir.

$X \times Y = \{(\text{Can, Demet}), (\text{Can, Aybala}), (\text{Can, Elif}), (\text{Çetin, Demet}),$
..... $(\text{Kürşad, Aybala}), (\text{Kürşad, Elif})\}$

İki küme arasındaki ilişki "evlilik" ilişkisi olsun

Evlilik ilişkisi $R = \{(\text{Çetin, Demet}), (\text{Can, Elif}), (\text{Kürşad, Aybala})\}$ olsun

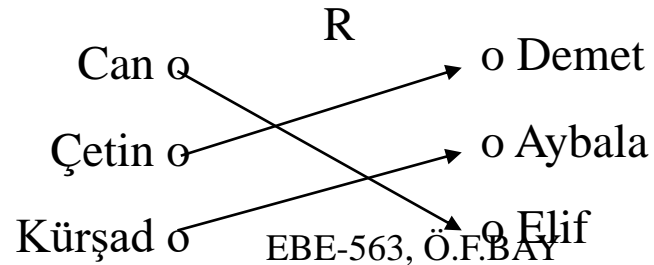
- Bu ilişki tablo şeklinde :

	Demet	Aybala	Elif
Can			x
Çetin	x		
Kürşad		x	

- Bu ilişki ilişkisel matris şeklinde :

$$\begin{matrix}
 & y_1 & y_2 & y_3 \\
 x_1 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 x_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 x_3 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

- Veya ok diyagramı şeklinde :



Keskin İlişkiler

- Örnek 2:

İnsan spor ilişkisi

- Aşağıdaki kümeleri varsayalım :

$A = \{\text{Ahmet, Bahadır, Cem}\}$

$B = \{\text{Futbol, Hokey, Basketbol, Tenis}\}$

- A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı $3 \times 4 = 12$ elemanı olan aşağıdaki kümedir.
- $\{(\text{Ahmet, Futbol}), (\text{Ahmet, Hokey}), (\text{Ahmet, Basketbol}), \dots, (\text{Cem, Tenis})\}$
- R, kimin hangi sporu yaptığını gösteren bir ilişki olsun:

Ahmet : Hokey, Basketbol

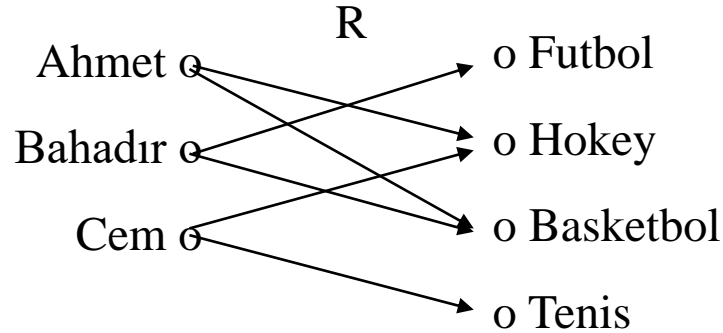
Bahadır : Futbol, Basketbol

Cem : Hokey, Tenis

- Bu ilişki tablo şeklinde :

	Futbol	Hokey	Basketbol	Tenis
Ahmet		x	x	
Bahadır	x		x	
Cem		x		x

- Veya ok diyagramını şeklinde :



- $A \times B$ kartezyen çarpımı A dan B ye bütün olası ilişkileri kapsar ve diğer alt ilişkiler kartezyen çarpımının alt kümesi kabul edilir.

Örnek-3

•Bütün lineer ikinci dereceden sürekli zaman sistemler kümesi ve bu sistemlerin kutuplarının kümesi arasındaki kararlılık ilişkisi R ile gösterilsin.

Lineer ikinci dereceden sürekli zaman sistemler ve bu sistemlerin kutuplarının oluşturacağı muhtemel çiftlerden yalnızca zamanla değişmeyen ve kutupları karmaşık s -düzleminin sol yarısında veya s -düzlemin sanal ekseninde olan sistemlerin kararlı olduğunu biliyoruz

$U = \{x_1, x_2\} = \{\text{Lineer ikinci dereceden zamanla değişen sürekli zamanlı sistemler, Lineer ikinci dereceden zamanla değişmeyen sürekli zamanlı sistemler}\}$ ve

$V = \{y_1, y_2, y_3\} = \{s\text{-düzleminin sol yarısındaki kutuplar, } j\omega \text{ eksenindeki kutuplar, } s\text{-düzlemin sağ yarısındaki kutuplar}\}$

Örnek-3(devam)

- ✓ Kartezyen çarpım $U \times V$, 2×3 dizi çifti gibi düşünülebilir. Örneğin (1-2) elemanı (lineer ikinci dereceden zamanla değişen sürekli zamanlı sistemler, kutuplar $j\omega$ ekseninde) olsun.
- ✓ Kararlılık ilişkisi $R(U,V)$ $U \times V$ 'nin alt kümesidir:
- ✓ $R(U,V) = \{(\text{lineer ikinci dereceden zamanla değişmeyen sürekli zamanlı sistemler, kutupları } s\text{-düzleminin sol yarısında}), (\text{lineer ikinci dereceden zamanla değişmeyen sürekli zamanlı sistemler, kutupları } j\omega \text{ ekseninde})\}$.

Ornek-3(devam)

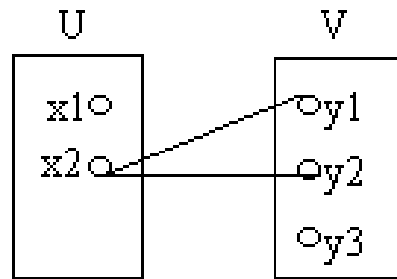
- ✓ Keskin ilişki $R(U, V)$ aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile tanımlanabilir:

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ancak ve ancak } (x, y) \in R(U, V) \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

- ✓ Üyelik fonksiyonlarının elemanları sıfır ve bir olan ilişkisel matriste toplamak uygun olacaktır. Kararlılık ilişkisi için ilişkisel matris şu şekilde olacaktır:

$$\begin{array}{c} y_1 \quad y_2 \quad y_3 \\ x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ x_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- ✓ Kararlılık ilişkisi için ok diyagramı:



Bulanık İlişkiler (Fuzzy Relations)

Bulanık ilişkiler iki veya daha fazla bulanık kümenin elemanları arasındaki karşılıklı etki ve bağlantıyı aralarındaki ilişkinin varlık veya yokluk derecesini temsil ederler.

Bulanık ilişki örnekleri;

- x y 'den daha büyüktür,
- y x 'e çok yakındır,
- z y 'den daha yeşildir,
- sistem-1 sistem-2'den daha küçük sönümlüdür,
- sistem-A'nın bant genişliği sistem-B'nin bant genişliğinden daha büyüktür.

Bulanık İlişkiler (Fuzzy Relations)

U ve V iki evrensel küme olsun.

Bir bulanık ilişki $R(U,V)$ $U \times V$ çarpım uzayında bir bulanık kümedir.

Örneğin $R(U,V)$ $U \times V$ 'nin bir bulanık alt kümesidir ve üyelik fonksiyonu $\mu_R(x,y)$ ile temsil edilir. Burada $x \in U$ ve $y \in V$ 'dir.

$R(U,V) = \{((x,y), \mu_R(x,y)) \mid (x,y) \in U \times V\}$ dir.

Bulanık ilişkide; $\mu_R(x,y) \in [0,1]$ 'dir,

Keskin ilişkide; $\mu_R(x,y)=0$ veya $\mu_R(x,y)=1$ 'dir.

Bulanık İlişkiler (Fuzzy Relations)

- n' ninci bir bulanık ilişki $U_1 \times \dots \times U_n$ kartezyen çarpımının bulanık alt kümesidir.
- Aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$R_U = \{((u_1, \dots, u_n), \mu_R(u_1, \dots, u_n)) \mid (u_1, \dots, u_n) \in U_1 \times \dots \times U_n\}$$

Burada $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$

Genellikle $n=2$ dir.

Bulanık İlişkiler (Fuzzy Relations)

- A dan B ye bulanık bir ikili ilişki olan R gerçekte $A \times B$ nin bir alt kümesidir.

$$\begin{aligned} R_U &= \{(a, b), \mu_R(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \\ &= \bigcup_{A \times B} \{(a, b), \mu_R(a, b)\} \end{aligned}$$

- Burada $\mu_R(a, b)$ R nin üyelik fonksiyonunu ve $\bigcup_{A \times B}$ de $A \times B$ üzerinde $\{(a, b) \mid \mu_R(a, b)\}$ tek yanlı bileşimi temsil eder.
- A ve B sonlu ve keskin, ve $|A|=m$ ve $|B|=n$, olduğunda

$$R = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \{(a, b), \mu_R(a, b)\}$$

Bulanık İlişkiler

- R, matris elemanlarının yerine $\mu_R(a,b)$ koyarak dikdörtgen bir tablo gibi ilişkiel matris adıyla gösterilebilir.

$$R = \begin{bmatrix} \mu_R(a_1, b_1) & \dots & \mu_R(a_1, b_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu_R(a_m, b_1) & \dots & \mu_R(a_m, b_n) \end{bmatrix}$$

- Özellikle $A=B$ olduğunda kartezyen çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$$

ve A da ki bulanık ilişki $A \times A$ nın bir alt kümesidir.

Bulanık İlişkiler Örnek

U ve V gerçek sayılar olsun,

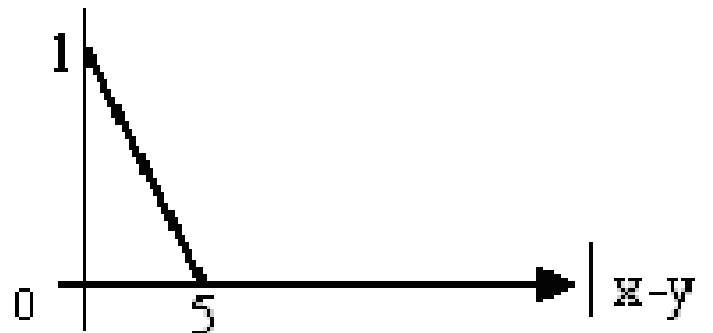
bulanık ilişki; “hedef x hedef y ’ye yakın” olsun.

Bu ilişki için üyelik fonksiyonu:

$$\mu_{\text{YAKIN}}(|x-y|) = \max[(5 - |x-y|)/5, 0].$$

İki hedef arasındaki uzaklık $|x-y|$ bağımsız değişken olarak davranmaktadır, bu ise onu iki boyutlu üyelik fonksiyonu olarak göstermeyi mümkün kılar.

$$\mu_{\text{YAKIN}}(|x-y|)$$



Bulanık İlişkiler

- Örnek :

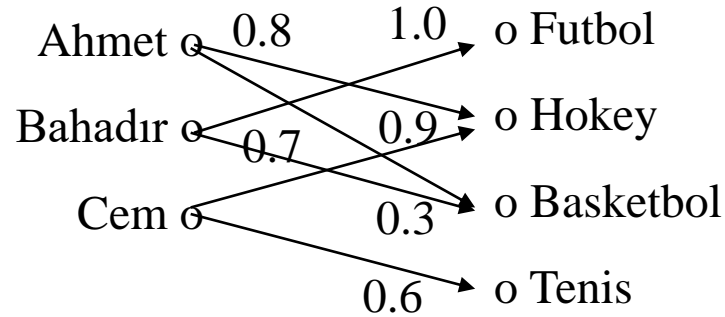
İnsan Spor ilişkisi (Bulanık ilişki)

İlişki matris'i aşağıdaki gibi verilsin :

	Futbol	Hokey	Basketbol	Tenis
Ahmet	0	0.8	0.7	0
Bahadır	1.0	0	0.3	0
Cem	0	0.9	0	0.6

Bulanık İlişkiler

- İnsan Spor ilişkisinin (Bulanık ilişki) grafik gösterilimi aşağıdaki gibidir :



Bulanık İlişkiler ile İşlemler

Bulanık ilişkiler çarpım uzayında bulanık kümeler olduğu için, bulanık birleşme, kesişme ve tümleme işlemleri için kullanılan operatörleri kullanarak kuramsal ve cebirsel küme işlemleri bulanık ilişkiler için de tanımlanabilir.

$R(x,y)$ ve $S(x,y)$ aynı çarpım uzayı $U \times V$ 'de iki bulanık ilişki olsun. İki ilişkinin bileşimi olan R ve S 'nin kesişimi ve birleşimi, aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır :

$$\mu_{R \cap S}(x, y) = \mu_R(x, y) * \mu_S(x, y)$$

$$\mu_{R \cup S}(x, y) = \mu_R(x, y) \oplus \mu_S(x, y)$$

burada \star herhangi bir t -norm ve \oplus ise herhangi bir t -conorm 'dur

Bulanık İlişkiler ile İşlemler

R ve S, $X \times Y$ kartezyen çarpım uzayında bulanık ilişkiler olsun ve aşağıdaki işlemleri uygulansın :

- **Birleşim** : $\mu_{R \cup S}(x, y) = \max\{\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)\}$
- **Kesişim** : $\mu_{R \cap S}(x, y) = \min\{\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)\}$
- **Tümleyen** : $\mu_{\bar{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$
- **Kapsayan** : $R \subset S \Rightarrow \mu_R(x, y) \leq \mu_S(x, y)$

Bulanık İlişkiler: Örnek

Bileşim cümlesi

“x y’den daha büyüktür ve y x’e çok yakındır”

Bu cümle; “ x y’den daha büyüktür “ ve “ y x’e çok yakındır“ cümlelerinden oluşan iki ilişki arasında bir bileşimdir.

Bu iki ilişki‘de aynı çarpım uzayı $U \times V$ ’de bulunmaktadır.

“x y’den daha büyüktür” ilişkisi için $\mu_{DB}(x,y)$ ve

“y x’e çok yakındır” ilişkisi için $\mu_{ÇY}(y,x)$) oluşturalım.

Bu üyelik fonksiyonlarını ve uygun t-normu (örneğin min) kullanarak bu cümle için şu şekilde bir üyelik fonksiyonunu oluşturabiliriz:

$$\mu_{DB \cap ÇY}(x,y) = \min [\mu_{DB}(x,y) , \mu_{ÇY}(y,x)]$$

Bulanık İlişkiler: Örnek (devam)

$U=\{x_1,x_2,x_3\}$ ve $V=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$ olsun.

$\mu_{DB}(x,y)$ ve $\mu_{ÇY}(y,x)$ üyelik fonksiyonlarının aşağıdaki şekilde ilişkisel matrisle verildiğini farzedelim:

$$\mu_{DB}(x,y) = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & (0.8 & 1 & 0.1 & 0.7) \\ x_2 & (0 & 0.8 & 0 & 0) \\ x_3 & (0.9 & 1 & 0.7 & 0.8) \end{matrix}$$

ve

$$\mu_{ÇY}(y,x) = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & (0.4 & 0.9 & 0.3) \\ y_2 & (0 & 0.4 & 0) \\ y_3 & (0.9 & 0.5 & 0.8) \\ y_4 & (0.6 & 0.7 & 0.5) \end{matrix}$$

Bulanık İlişkiler: Örnek (devam)

$$\mu_{DB \cap CY}(x_3, y_4) = \min[\mu_{DB}(x_3, y_4), \mu_{CY}(y_4, x_3)] = \min(0.8, 0.5) = 0.5$$

$\mu_{DB \cap CY}(x, y)$ üyelik fonksiyonunun tamamı aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\mu_{DB \cap CY} = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.1 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matris'e dikkatli bakıldığında elemanlarının çoğunun 0,5'ten küçük olduğu görülmektedir. Bu cümle (x_1, y_4) ve (x_3, y_3) ihtimalleri haricinde yüksek dereceden güvensizlik göstermektedir

FARKLI ÇARPIM UZAYINDA İLİŞKİLER VE BİLEŞİMLER

Keskin Bileşimler (Crisp Compositions):

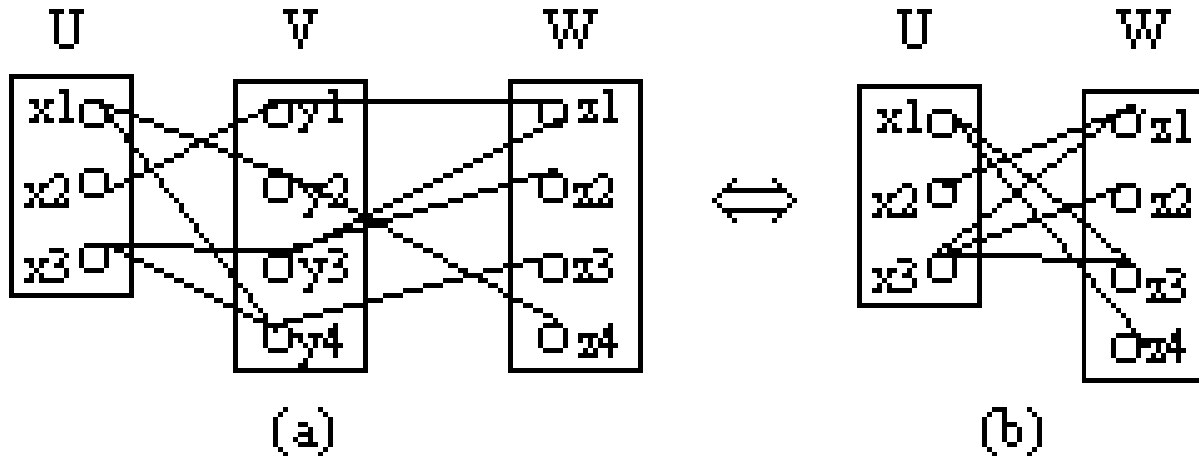
- Burada ortak bir kümeyi paylaşan $P(U, V)$ ve $Q(V, W)$ olarak isimlendirilen kümelerin farklı çarpım uzaylarında keskin ilişkiler bileşimi dikkate alınacaktır.
- Klir ve Folger 'e göre bu iki ilişkinin bileşimi aşağıdaki gibi gösterilmekte

$$R(U, W) = P(U, V) \circ Q(V, W)$$

ve $R(U, W)$, $U \times W$ 'nin alt kümesi olarak tanımlanmaktadır, öyle ki $(x, z) \in R$ ancak ve ancak en az bir tane $y \in V$, öyle ki $(x, y) \in P$ ve $(y, z) \in Q$.

Keskin Bileşimler Örnek

Şekil’de gösterilen ok diyagramını dikkate alarak,
 $R1(U,V)$, $R2(V,W)$ ve $R3(U,W)$ ilişkisel matrisleri elde edelim



Keskin Bileşimler Örnek (devam)

Şekil'de gösterilen ok diyagramını dikkate alarak,

$R_1(U, V)$, $R_2(V, W)$ ve $R_3(U, W)$ ilişkisel matrisleri elde edelim

$$R_1(U, V) = \begin{matrix} & y1 & y2 & y3 & y4 \\ \begin{matrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$R_2(V, W) = \begin{matrix} & z1 & z2 & z3 & z4 \\ \begin{matrix} y1 \\ y2 \\ y3 \\ y4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$R_3(U, W) = \begin{matrix} & z1 & z2 & z3 & z4 \\ \begin{matrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Keskin Bileşimler

Ok diyagramlarla bileşimleri tanımlamak yeterli olmadığı için aynı bilgileri taşıyan bir formüle ihtiyaç bulunmaktadır.

$P(U,V)$ ve $Q(V,W)$ ilişkilerinin max-min bileşimi, $\mu_{P \circ Q}(x,z)$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanmaktadır, burada,

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \left\{ (x, z), \max_y [\min(\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z))] \right\}$$

$P(U,V)$ ve $Q(V,W)$ ilişkilerinin max çarpım bileşimi, $\mu_{P \times Q}(x,z)$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanmaktadır, burada,

$$\mu_{P \times Q}(x, z) = \left\{ (x, z), \max_y [\mu_P(x, y) \mu_Q(y, z)] \right\}$$

Aslında, max-min veya max-product bileşim işlemleri yapılarak doğru ilişkisel matris $R(U,W)$ elde edilmektedir.

Keskin Bileşimler Örnek

İlişkisel matriste $R_3(U,W)$ ' nin (1-2) elemanı için önerilen formülleri doğrularsak.

Max-min kullanıldığında;

$$\begin{aligned}\mu_{R_3}(x_1, z_2) &= \{(x_1, z_2), \max_y[\min(\mu_{R_1}(x_1, y), \mu_{R_2}(y, z_2))]\} \\ &= \{(x_1, z_2), \max[\min(\mu_{R_1}(x_1, y_1), \mu_{R_2}(y_1, z_2)), \\ &\quad \min(\mu_{R_1}(x_1, y_2), \mu_{R_2}(y_2, z_2)), \\ &\quad \min(\mu_{R_1}(x_1, y_3), \mu_{R_2}(y_3, z_2)), \\ &\quad \min(\mu_{R_1}(x_1, y_4), \mu_{R_2}(y_4, z_2))]\} \\ &= \{(x_1, z_2), \max[\min(0,0), \min(1,0), \min(0,1), \min(1,0)]\} \\ &= \{(x_1, z_2), \max[0,0,0,0] = 0\}, \\ &\text{bu ise ilişkisel matris ile uyumludur.}\end{aligned}$$

Keskin Bileşimler Örnek

İlişkisel matriste $R_3(U,W)$ ' nin (1-2) elemanı için önerilen formülleri doğrularsak.

Max-çarpım kullanıldığında;

$$\mu_{R_3}(x_1, z_2) = \{(x_1, z_2), \max_y [(\mu_{R_1}(x_1, y) \cdot \mu_{R_2}(y, z_2))]\}$$

$$= \{(x_1, z_2), \max[\mu_{R_1}(x_1, y_1) \cdot \mu_{R_2}(y_1, z_2), \\ \mu_{R_1}(x_1, y_2) \cdot \mu_{R_2}(y_2, z_2), \\ \mu_{R_1}(x_1, y_3) \cdot \mu_{R_2}(y_3, z_2), \\ \mu_{R_1}(x_1, y_4) \cdot \mu_{R_2}(y_4, z_2)]\}$$

$$= \{(x_1, z_2), \max[(0 \times 0), (1 \times 0), (0 \times 1), (1 \times 0)]\}$$

$$= \{(x_1, z_2), \max[0, 0, 0, 0] = 0\},$$

bu ise ilişkisel matris ile uyumludur.

Keskin Bileşimler

Kestirme yollar

Max-Min Bileşimi:

- Matris çarpımı $Q(U, V)$ ve $P(V, W)$ 'daki her bir eleman yazılır,
- Her bir çarpma min işlemi olarak ele alınır ve
- Her bir toplama max işlemi gibi ele alınır.

Max-Çarpım Bileşimi:

- Matris çarpımı $Q(U, V)$ ve $P(V, W)$ 'daki her bir eleman yazılır,
- Her bir çarpma cebirsel çarpma işlemi olarak ele alınır ve
- Her bir toplama max işlemi gibi ele alınır.

Kestirme yollar Örnek

Keskin Bileşimler örneğindeki $R_3(U,W)$ 'nin 1-3 elemanı için:

Max-Min Bileşimi:

$$\begin{aligned}R_3(x_1, z_3) &= 0 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 1 \\ &= \min(0,0) + \min(1,0) + \min(0,0) + \min(1,1) \\ &= \max(0,0,0,1) = 1\end{aligned}$$

Max-Çarpım Bileşimi:

$$\begin{aligned}R_3(x_1, z_3) &= 0 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 1 \\ &= (0 \times 0) + (1 \times 0) + (0 \times 0) + (1 \times 1) \\ &= \max(0,0,0,1) = 1\end{aligned}$$

Bulanık Bileşimler (Fuzzy Compositions)

Ortak bir kümeyi paylaşan $R(U,V)$ ve $S(V,W)$ olarak isimlendirilen kümelerin farklı çarpım uzaylarında bulanık ilişkiler bileşimi dikkate alınacaktır.

Örneğin “ x daha büyük y ve y çok yakın z ” farklı çarpım uzaylarında ortak bir kümeyi paylaşan bulanık ilişkiler bileşimi keskin bileşimle benzer şekilde tanımlanmaktadır.

Ancak bulanık bileşimde kümeler de bulanıktır.

Bulanık ilişki R ‘nin üyelik fonksiyonu $\mu_R(x,y)$, $\mu_R(x,y) \in [0,1]$

Bulanık ilişki S ‘nin üyelik fonksiyonu $\mu_S(y,z)$, $\mu_S(y,z) \in [0,1]$.

R ve S ayrık evrensel kümelerde olduğunda RoS şeklinde gösterilen R ve S ‘nin bulanık bileşimi, ya ok diyagramları tarafından ya da bir bulanık ilişki matrisiyle tanımlanabilir.

Bulanık Bileşimler (Fuzzy Compositions)

İlişkilerin bileşiminde kullanılan formüller $\mu_{R \circ S}(x, z)$ ile ifade edilebilir.

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in V} [\mu_R(x, y) * \mu_S(y, z)]$$

R ve S ‘nin sup-star bileşimi olarak söylenir.

U, V ve W ayrık evrensel kümeler olduğunda sup işlemi maksimumdur (max).

t-norm için kısa ad olan “star” işlemi keskin max-min ve max-çarpım bileşiminden gelmektedir, çünkü min ve çarpım her ikisi de t-norm’dur.

En çok kullanılan sup-star bileşimleri; sup-min ve sup-çarpım’dır.

Bulanık Bileşimler Örnek

“ x daha büyük y ve y çok yakın z” cümlesini dikkate alalım.

” x daha büyük y ” ilişkisi için $\mu_{DB}(x,y)$ üyelik fonksiyonunu

“ y çok yakın z “ ilişkisi için $\mu_{ÇY}(y,z)$ üyelik fonksiyonunu oluşturalım.

$$\mu_{DB}(x, y) = \begin{matrix} & y1 & y2 & y3 & y4 \\ \begin{matrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\mu_{ÇY}(y, z) = \begin{matrix} & z1 & z2 & z3 \\ \begin{matrix} y1 \\ y2 \\ y3 \\ y4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.9 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Bulanık Bileşimler Örnek

max-min bileşimi kullanılarak aşağıdaki ilişkisel matris bulunur:

$$\mu_{DB \circ_{\text{ÇY}}}(X, Z) = \begin{matrix} & z1 & z2 & z3 \\ x1 & (0.6 & 0.8 & 0.5) \\ x2 & (0 & 0.4 & 0) \\ x3 & (0.7 & 0.9 & 0.7) \end{matrix}$$

max-çarpım bileşimi kullanıldığında aşağıdaki ilişkisel matris elde edilir:

$$\mu_{DB \times_{\text{ÇY}}}(X, Z) = \begin{matrix} & z1 & z2 & z3 \\ x1 & (0.42 & 0.72 & 0.35) \\ x2 & (0 & 0.32 & 0) \\ x3 & (0.63 & 0.81 & 0.56) \end{matrix}$$

Bulanık Bileşimler

Örnek : Max-min tabanlı bileşim işlemi

- Bulanık bilgi tabanlı sistemlerde bileşim operatörleri bulanık ilişki denklemini kurmakta önemli bir rol oynar. Temelde bileşim işlemleri bir ilişkiyi başka bir ilişkiye uygulamada net bir etki yaparlar. Bir çok uygulamada max-min operatörü tercih edilmektedir.
- P ve Q aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun.

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.9 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Max-min bileşim işlemi uygulandığında R ilişkisi :

$$R = P \circ Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \end{bmatrix}$$

Burada :

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \max \{ \min (0.1, 0.3), \min (0.5, 0.7) \} \\
 &= \max \{ 0.1, 0.5 \} \\
 &= 0.5 \\
 R_{12} &= \max \{ \min (0.1, 0.6), \min (0.5, 0.5) \} \\
 &= \max \{ 0.1, 0.5 \} \\
 &= 0.5 \\
 R_{13} &= \max \{ \min (0.1, 0.8), \min (0.5, 0.4) \} \\
 &= \max \{ 0.1, 0.5 \} \\
 &= 0.4 \\
 R_{21} &= \max \{ \min (0.6, 0.3), \min (0.9, 0.7) \} \\
 &= \max \{ 0.3, 0.7 \} \\
 &= 0.7 \\
 R_{22} &= \max \{ \min (0.6, 0.6), \min (0.9, 0.5) \} \\
 &= \max \{ 0.6, 0.5 \} \\
 &= 0.6 \\
 R_{23} &= \max \{ \min (0.6, 0.8), \min (0.9, 0.4) \} \\
 &= \max \{ 0.6, 0.4 \} \\
 &= 0.6
 \end{aligned}$$

Bulanık Bileşimler

Örnek :

- ✓ R ve S iki bulanık ilişki olsun:

R	y_1	y_2	y_3
x_1	0.4	0.6	0
x_2	0.9	1	0.1

S	z_1	z_2
y_1	0.5	0.8
y_2	0.1	1
Y_3	0	0.6

- ✓ Burada hedef hem Max-min hem de Max-çarpım bileşim kurallarını kullanarak $R \circ S$ yi hesaplamaktır.

Max-Min Bileşimi

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 1 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\max\{\min(0.4, 0.5), \min(0.6, 0.1), \min(0, 0)\}$$

$$= \max\{0.4, 0.1, 0\} = 0.4$$

$$\max\{\min(0.4, 0.8), \min(0.6, 1), \min(0, 0.6)\}$$

$$= \max\{0.4, 0.6, 0\} = 0.6$$

$$\max\{\min(0.9, 0.5), \min(1, 0.1), \min(0.1, 0)\}$$

$$= \max\{0.5, 0.1, 0\} = 0.5$$

$$\max\{\min(0.9, 0.8), \min(1, 1), \min(0.1, 0.6)\}$$

$$= \max\{0.8, 1, 0.1\} = 1$$

Max-Çarpım Bileşimi

$$\text{RoS} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 1 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.45 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\max\{0.4 \cdot 0.5, 0.6 \cdot 0.1, 0 \cdot 0\} = \max\{0.2, 0.06, 0\} = 0.2$$

$$\max\{0.4 \cdot 0.8, 0.6 \cdot 1, 0 \cdot 0.6\} = \max\{0.32, 0.6, 0\} = 0.6$$

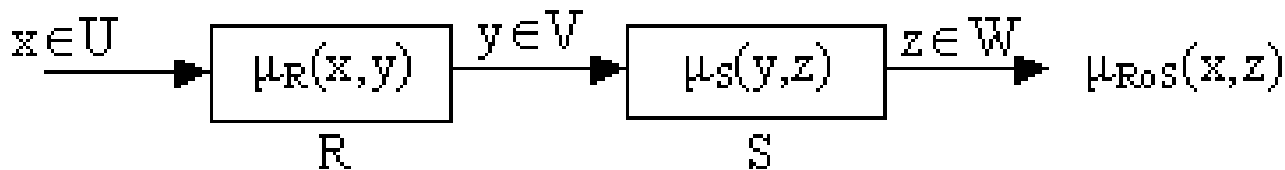
$$\max\{0.9 \cdot 0.5, 1 \cdot 0.1, 0.1 \cdot 0\} = \max\{0.45, 0.1, 0\} = 0.45$$

$$\max\{0.9 \cdot 0.8, 1 \cdot 1, 0.1 \cdot 0.6\} = \max\{0.72, 1, 0.06\} = 1$$

Bulanık Bileşimler Örnek

Dikkat edilirse keskin bileşim durumlarında max-min veya max-product bileşimleri kullanıldığında her ikisinden de aynı sonuçlar elde edilmektedir. Ancak aynı sonuçlar bulanık bileşim durumunda elde edilememektedir. Bu bulanık bileşim ile keskin bileşim arasındaki ana farktır

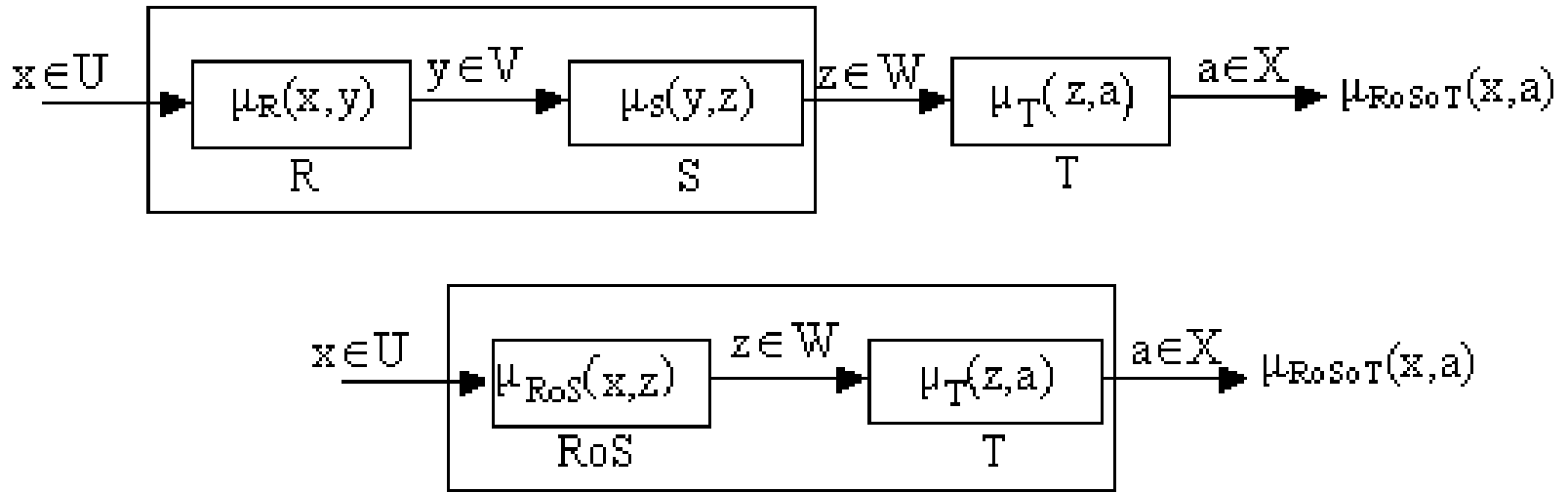
Aşağıda Sup-star bileşiminin blok diyagram yorumu görülmektedir. Bu diyagram hem keskin hem de bulanık bileşimler için geçerlidir.



Karmaşık bulanık ilişkileri bileştirmek için basit bir yoldur

Bulanık Bileşimler Blok Diyagram Gösterimi

Örnek : Çoklu bulanık ilişkilerin ikili bloklar haline indirgenmesi



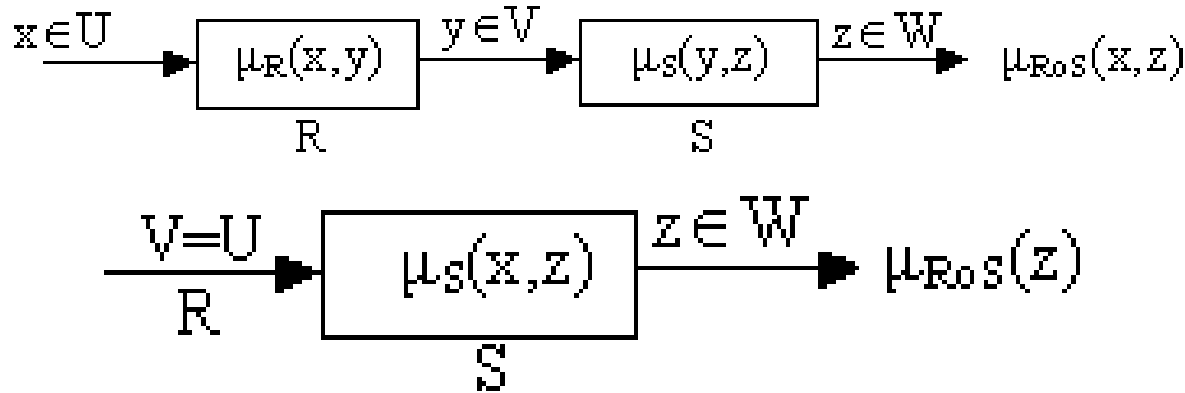
Üç bulanık ilişkinin bağlantısı ve bunların bir araya getirilmesi. İlk ilişkiler R ve S sup-star bileşimi kullanılarak birleştirilmekte sonra elde edilen sonuç ilişki T ile yine S sup-star bileşimi kullanılarak birleştirilmektedir. (ilk olarak S ve T ilişkileri birleştirilip sonra elde edilen sonuç R ile birleştirilebilir.)

Blok Diyagram Gösterimi Örnek :

Bulanık ilişki R'nin bir bulanık küme olduğunu varsayalım, öyle ki $\mu_R(xy)$ 'sadece $\mu_R(x)$ olsun ,

“ y orta büyüklüktedir ve z y 'den daha küçüktür”.

Bu durumda $V=U$ 'dur



Üstteki blok diyagram alttaki blok diyagrama indirgenir.

Bu da bize bir bulanık kümenin nasıl bir bulanık ilişkiye dönüştürülebileceği fikrini verir.

Bu özel durum bulanık çıkarım olarak adlandırılır ve bulanık mantık sistemlerinin geliştirilmesinde büyük önem arz etmektedir

Bulanık Bileşimler Blok Diyagram Gösterimi

YORUM :

V=U olduğu durumda, sup-star bileşimi aşağıdaki hale gelmektedir:

$$\text{Sup}_{y \in V} [\mu_R(x, y) \star \mu_S(y, z)] = \text{Sup}_{x \in U} [\mu_R(x) \star \mu_S(x, z)]$$

Bu ise sadece çıkış değişkeni z'nin bir fonksiyonudur.

Buradan $\mu_{R \circ S}(x, z)$ 'yi $\mu_{R \circ S}(z)$ 'ye indirgeyebiliriz,

Böylece R sadece bulanık bir küme olduğu zaman, $\mu_{R \circ S}(z)$ aşağıdaki şekli alır:

$$\mu_{R \circ S}(z) = \sup_{x \in U} [\mu_R(x) * \mu_S(x, z)]$$

Bulanık Bileşimler Blok Diyagram Gösterimi

$V=U$ durumunda;

Ayrık evrensel kümeler için daha önce bahsedilen kestirme yolları kullanılabilir.

Ancak önce $\mu_R(x)$ için bir sıra matrisi oluşturulmalıdır.

Örneğin, eğer $x \in U$ ve $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise,

$R(U) = \{\mu_R(x_1), \mu_R(x_2), \dots, \mu_R(x_n)\}$ olsun.

Kestirme Yol

Max-Min Bileşimi:

Matris çarpımı $R(U)$ ve $S(U, W)$ 'deki her bir eleman yazılır,

Her bir çarpma min işlemi olarak ele alınır ve

Her bir toplama max işlemi gibi ele alınır.

Max-Çarpım Bileşimi:

Matris çarpımı $R(U)$ ve $S(U, W)$ 'deki her bir eleman yazılır,

Her bir çarpma cebirsel çarpma işlemi olarak ele alınır ve

Her bir toplama max işlemi gibi ele alınır.

Bulanık Bileşimler

Örnek (V=U):

$$I = [0 \quad 0 \quad 0,6 \quad 0,4 \quad 0]$$

$$R = \begin{bmatrix} -1 & -0,3 & 0 \\ -0,3 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,3 & 1 \\ 0,3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0,3 \end{bmatrix}$$

$$O = I \circ R = [0 \quad 0 \quad 0,6 \quad 0,4 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & -0,3 & 0 \\ -0,3 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,3 & 1 \\ 0,3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Sup-min (max-min)

$$O = [0,3 \quad 0,4 \quad 0,6]$$

Sup-çarpım (max-çarpım)

$$O = [0,12 \quad 0,4 \quad 0,6]$$