

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN DEVRE ANALİZİNE UYGULANMASI

ÖĞRENME HEDEFLERİ

Laplace ile devre çözümleri
Laplace dönüşümünün kullanışlılığını gösterme

Devre Elemanı Modelleri
Devrelerin Laplace düzlemine dönüştürülmesi

Analiz Teknikleri
Tüm standart analiz teknikleri, KGK, KAK, düğüm,
çevre analizi, Thevenin teoremi uygulanması

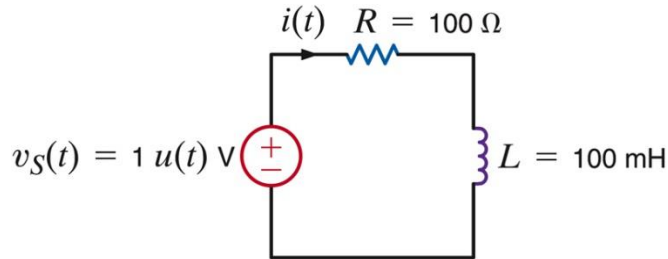
Transfer Fonksiyonu
Konunun gözden geçirilmesi ve anlamlandırılması

Kutup-Sıfır Eğrileri / Bode Eğrileri
Aralarındaki bağlantının kurulması

Kalıcı Durum Analizi
AA analizinin gözden geçirilmesi

LAPLACE İLE DEVRE ÇÖZÜMLERİ

Diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan konvansiyonel bir yaklaşımı, Laplace dönüşümü kullanan bir teknikle karşılaştıralım



$$\text{KGK : } v_S(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}(t)$$

Tamamlayıcı

$$i = i_C + i_p$$

Özel çözüm

Tamamlayıcı i denklem

$$Ri_C(t) + L \frac{di_C}{dt}(t) = 0 \Rightarrow i_C(t) = K_C e^{-\alpha t}$$

$$RK_C e^{-\alpha t} + LK_C (-\alpha e^{-\alpha t}) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{R}{L}$$

Bu durum için özel çözüm

$$i_p(t) = K_p \Rightarrow v_S = 1 = RK_p$$

$$i(t) = \frac{1}{R} + K_C e^{-\frac{R}{L}t}$$

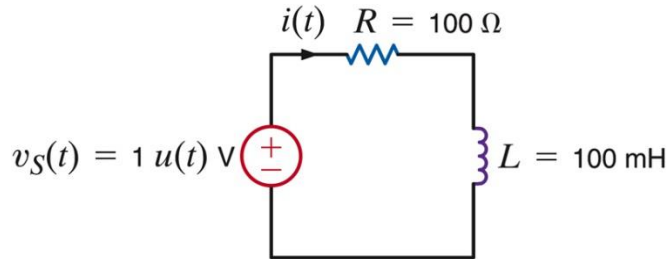
Sinir şartlarını kullanalım

$$v_S(t) = 0, t < 0 \text{ için } \Rightarrow i(0) = 0$$

$$i(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right); t > 0$$

LAPLACE İLE DEVRE ÇÖZÜMLERİ

Diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan konvansiyonel bir yaklaşımı, Laplace dönüşümü kullanan bir teknikle karşılaştıralım (devamı)



Denklemin “ Laplace dönüşümünü” alın

$$v_S(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}(t)$$

$$V_S(s) = RI(s) + L\mathcal{L}\left[\frac{di}{dt}\right]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{di}{dt}\right] = sI(s) - i(0) = sI(s)$$

$$\therefore \frac{1}{s} = RI(s) + LsI(s)$$

$$I(s) = \frac{1}{s(R + Ls)}$$

$$I(s) = \frac{1/L}{s(R/L + s)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + R/L}$$

$$K_1 = sI(s)|_{s=0} = \frac{1}{R}$$

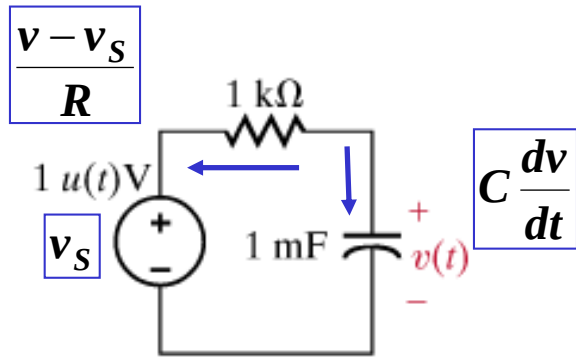
$$K_2 = (s + R/L)I(s)|_{s=-R/L} = -\frac{1}{R}$$

$$i(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right); t > 0$$

Sadece cebirsel işlem gereklidir.

Başlangıç şartları otomatik olarak dahil edilmektedir.

Özel veya tamamlayıcı çözüm aramaya ihtiyaç bulunmamaktadır.



$$\mathcal{L}\left[\frac{dv}{dt}\right] = sV(s) - v(0) = sV(s)$$

$$v_S(t) = 0, t < 0 \Rightarrow v(0) = 0$$

$$v_S = u(t) \Rightarrow V_S(s) = \frac{1}{s}$$

Örtük biçimde
verilen başlangıç
durumu

KAK kullanılan model

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v - v_S}{R} = 0$$

$$RC \frac{dv}{dt} + v = v_S$$

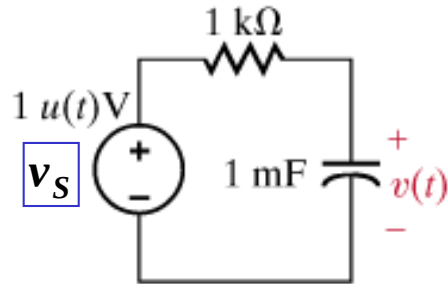
$$RC \mathcal{L}\left[\frac{dv}{dt}\right] + V(s) = V_S(s)$$

$\mathcal{L}$

Diferansiyel denklem Laplace düzleminde,
şimdi cebirsel bir denklemdir.

$$RCsV(s) + V(s) = \frac{1}{s}$$

$$V(s) = \frac{1}{s(RCs + 1)} = \frac{1/RC}{s(s + 1/RC)}$$



$$RC \frac{dv}{dt} + v = v_S$$

Diferansiyel denklem
Laplace düzleminde
şimdi cebirsel bir
denklemdir.

$$RCsV(s) + V(s) = \frac{1}{s}$$

$$V(s) = \frac{1}{s(RCs + 1)} = \frac{1/RC}{s(s + 1/RC)}$$

Ters Laplace dönüşümü için
Kısmi kesirlere ayırmayı kullanalım

$$V(s) = \frac{1/RC}{s(s + 1/RC)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 1/RC}$$

$$K_1 = sV(s)|_{s=0} = 1$$

$$K_2 = (s + 1/RC)V(s)|_{s=-1/RC} = -1$$

$$v(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}, t \geq 0$$

DEVRE ELEMANI MODELLERİ

Bağımsız Kaynaklar

$$v_s(t) \rightarrow V_s(s)$$

$$i_s(t) \rightarrow I_s(s)$$

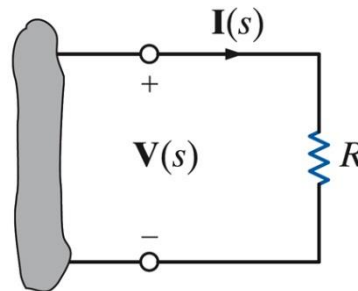
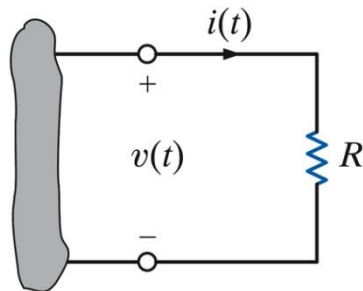
Bağımlı Kaynaklar

$$v_D(t) = A i_C(t) \rightarrow V_D(s) = A I_C(s)$$

$$i_D(t) = B v_C(t) \rightarrow I_D(s) = B V_C(s)$$

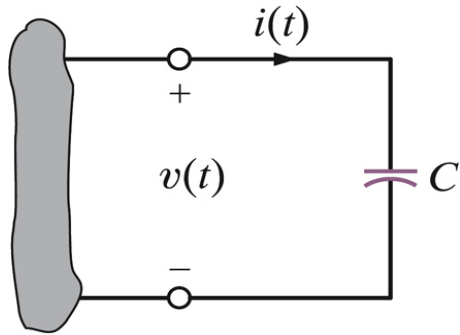
...

Direnç Elemanı



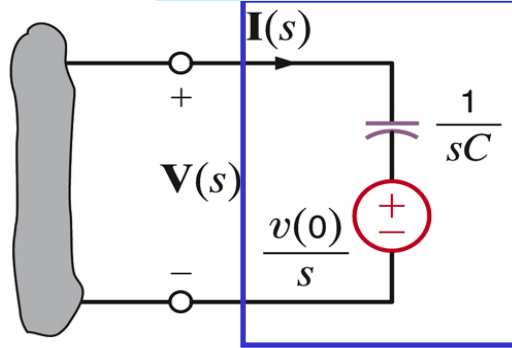
$$v(t) = Ri(t) \Rightarrow V(s) = RI(s)$$

Kapasitör: Model 1



$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(x) dx + v(0)$$

Kaynak dönüşümü



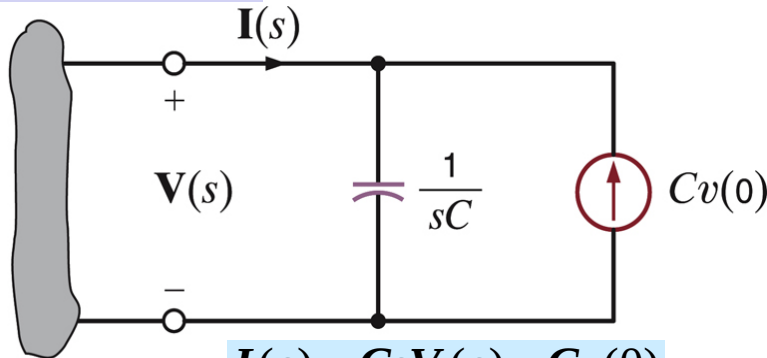
$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s) + \frac{v(0)}{s}$$

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t i(x) dx \right] = \frac{I(s)}{s}$$

$$I_{es} = \frac{\frac{v(0)}{s}}{\frac{1}{Cs}} = Cv(0)$$

Gerilim kaynağına seri
bağlı empedans

Kapasitör: Model 2

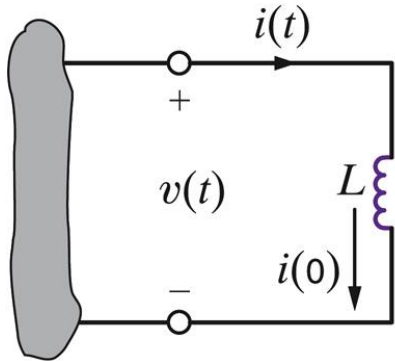


$$I(s) = CsV(s) - Cv(0)$$

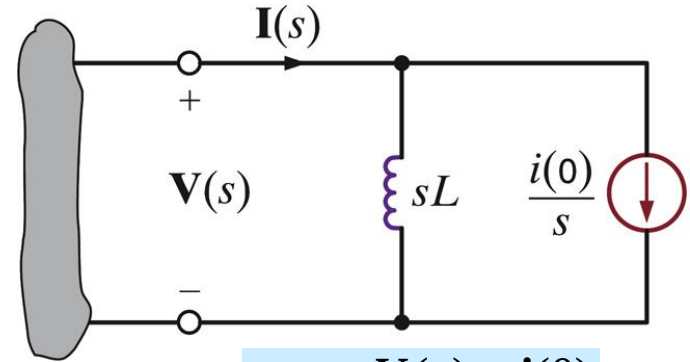
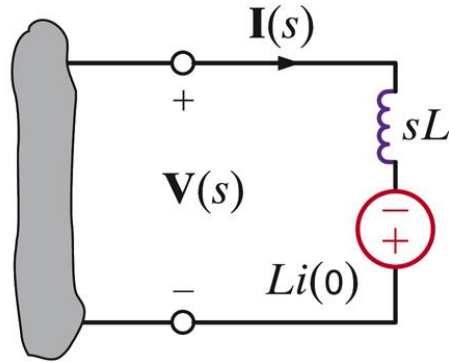
Akım kaynağına paralel
bağlı empedans

indüktör Modelleri

$$\mathcal{L}\left[\frac{di}{dt}\right] = sI(s) - i(0)$$

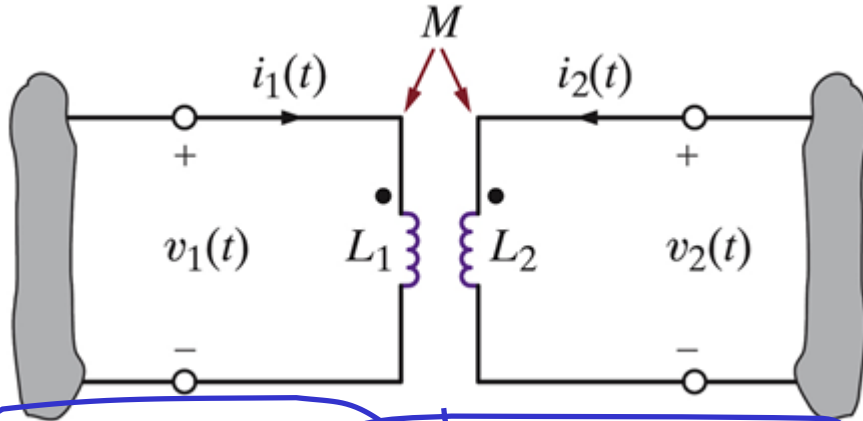


$$v(t) = L \frac{di}{dt}(t) \Rightarrow V(s) = L(sI(s) - i(0))$$



$$I(s) = \frac{V(s)}{Ls} + \frac{i(0)}{s}$$

Ortak idüktans



$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t)$$

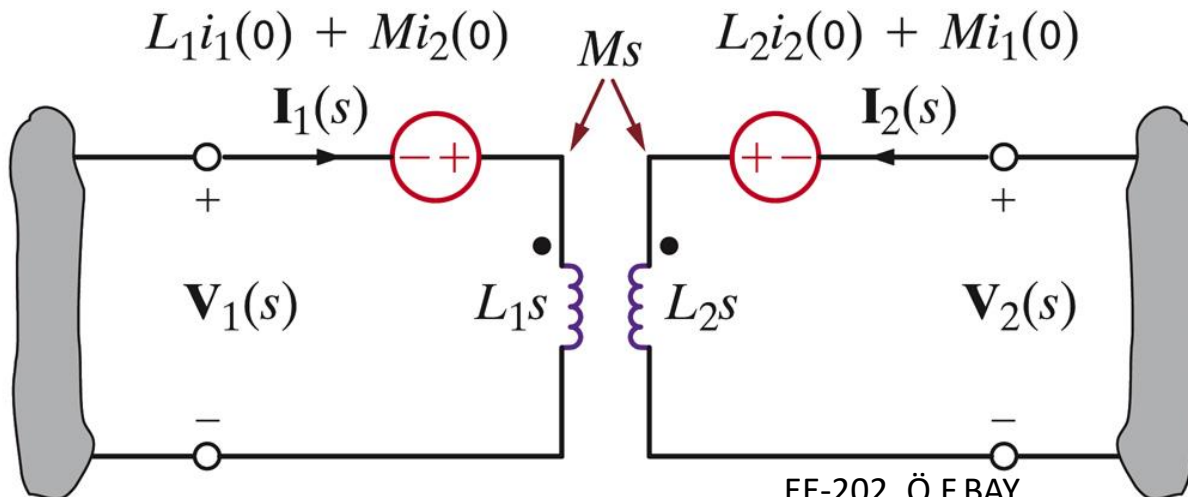
$$v_2(t) = M \frac{di_1}{dt}(t) + L_2 \frac{di_2}{dt}(t)$$

$$V_1(s) = L_1 s I_1(s) - L_1 i_1(0) + M s I_2(s) - M i_2(0)$$

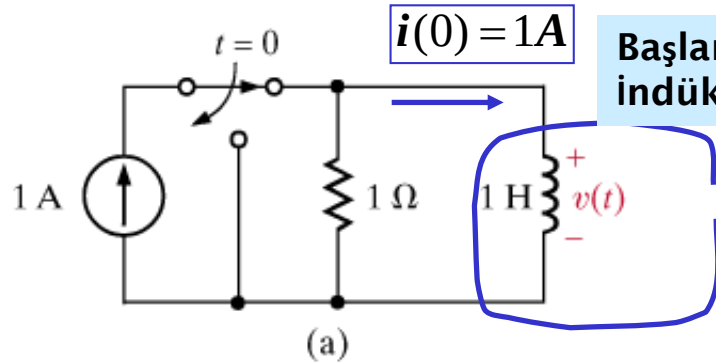
$$V_2(s) = M s I_1(s) - M i_1(0) + L_2 s I_2(s) - L_2 i_2(0)$$

Birincil tarafta tek bir kaynakta birleştirin

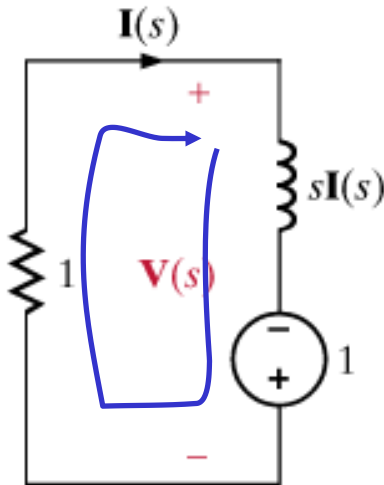
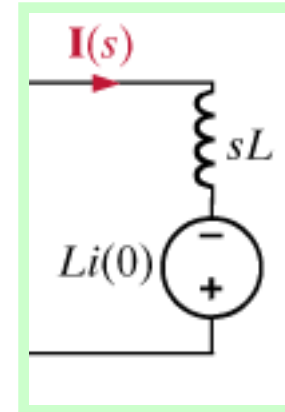
ikincil tarafta tek kaynak



$t < 0$ için kalıcı durum



Başlangıç akımı ile indüktör



KGK : $1 = (1 + s)I(s)$

Ohm Kanunu

$$V(s) = -1 \times I(s) \Rightarrow V(s) = -\frac{1}{s+1}$$

S-düzleminde Eşdeğer devre

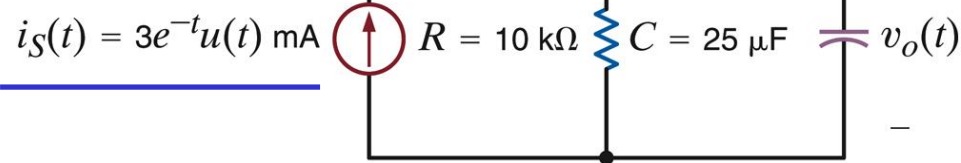
ANALİZ TEKNİKLERİ

Tüm analiz teknikleri s-düzleminde uygulanabilir

ÖRNEK

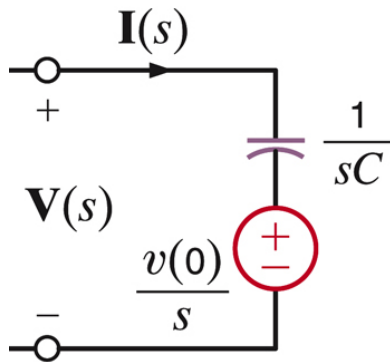
S-düzlemindeki eşdeğer devreyi çizin ve gerilimi hem s-düzleminde hem de zaman düzleminde bulun

$$I_S(s) = \frac{3}{s+1}$$

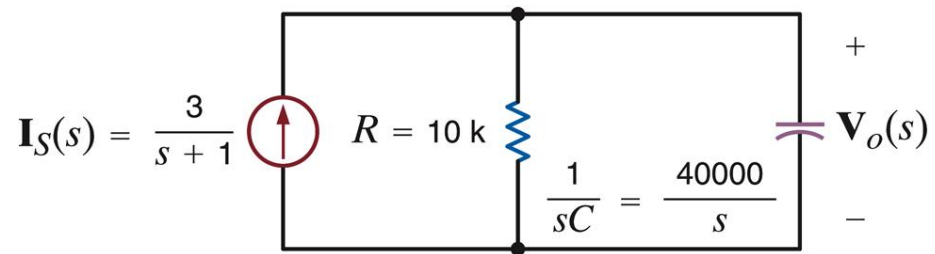


$$i_S(t) = 0, t < 0 \Rightarrow v_o(0) = 0$$

Önce kapasitördeki başlangıç geriliminin belirlenmesi gerekir



$$RC = (10 \times 10^3)(25 \times 10^{-6}) = 0.25$$



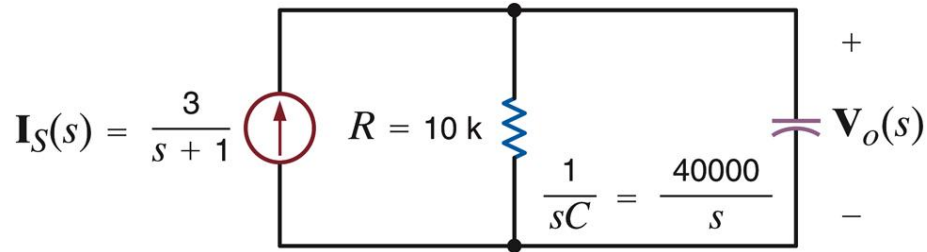
$$V_o(s) = \left(R \parallel \frac{1}{Cs} \right) I_S(s)$$

$$V_o(s) = \frac{\frac{R}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} I_S(s) = \frac{1/C}{s + 1/RC} \times \frac{3 \times 10^{-3}}{s+1}$$

ÖRNEK - devamı

S-düzlemindeki eşdeğer devreyi çizin ve gerilimi hem s-düzleminde hem de zaman düzleminde bulun

$$RC = (10 \times 10^3)(25 \times 10^{-6}) = 0.25$$



$$V_o(s) = \frac{1/C}{s + 1/RC} \times \frac{3 \times 10^{-3}}{s+1}$$

$$V_o(s) = \frac{120}{(s+4)(s+1)} = \frac{K_1}{s+4} + \frac{K_2}{s+1}$$

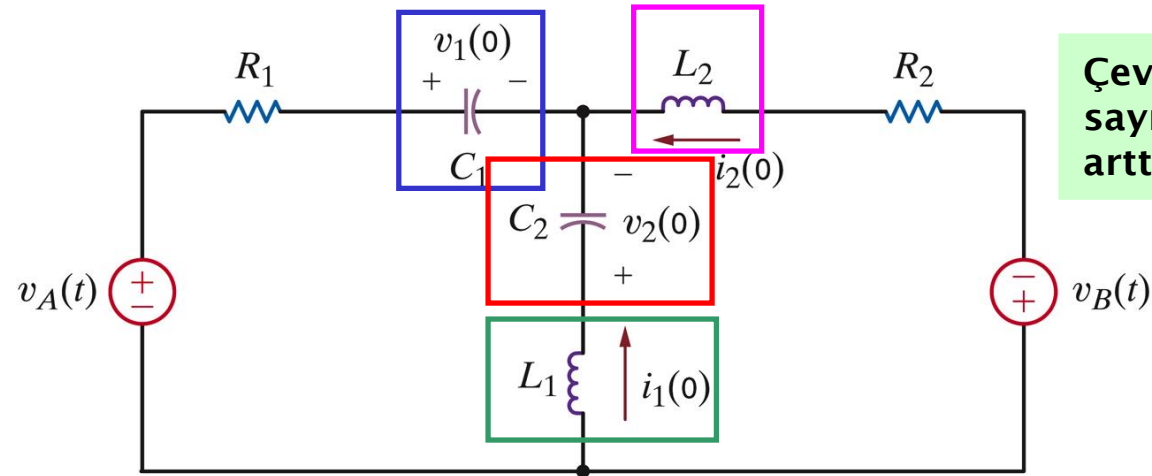
$$K_1 = (s+4)V_o(s)|_{s=-4} = -40$$

$$K_2 = (s+1)V_o(s)|_{s=-1} = 40$$

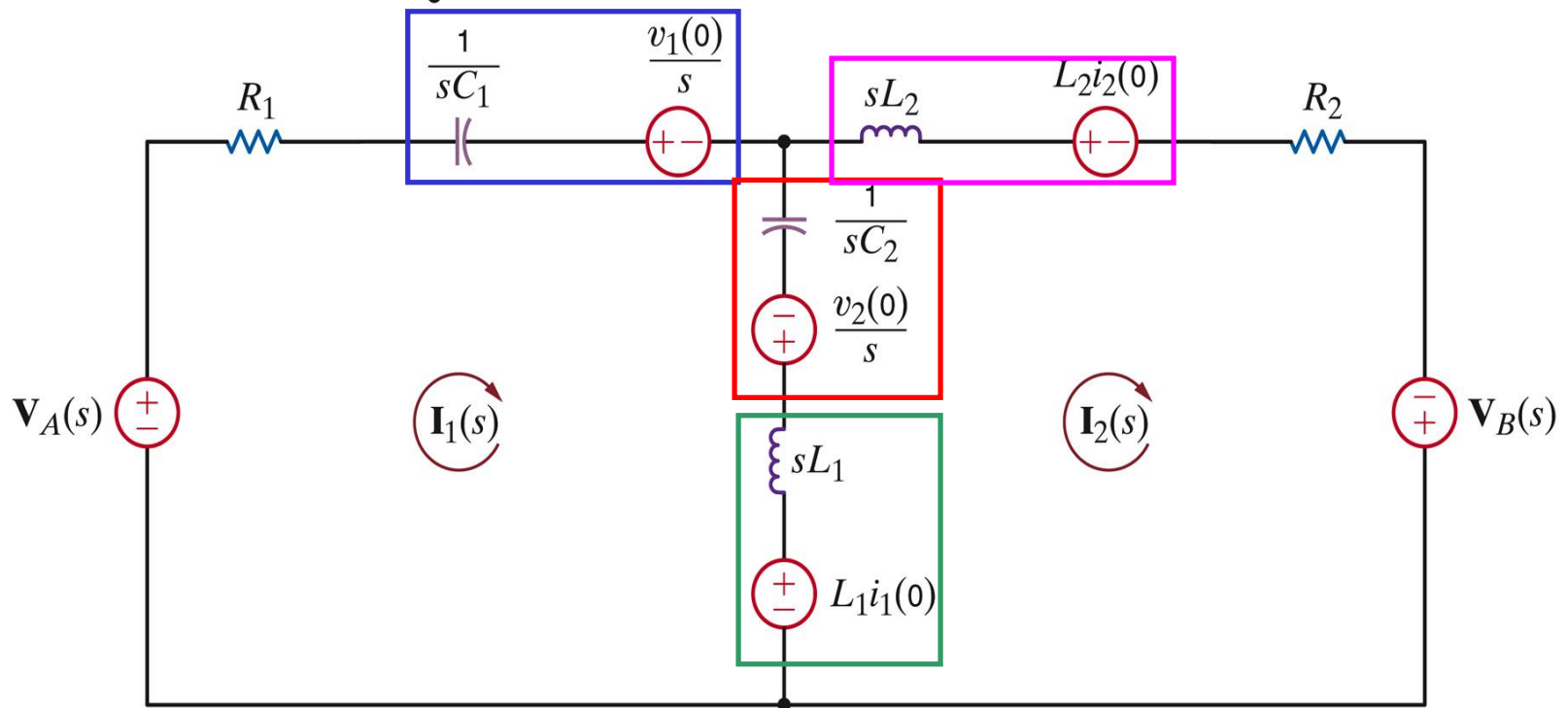
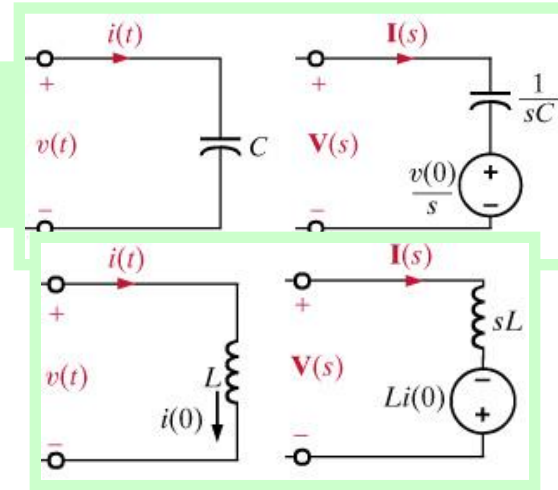
$$v_o(t) = 40[e^{-t} - e^{-4t}]u(t)$$

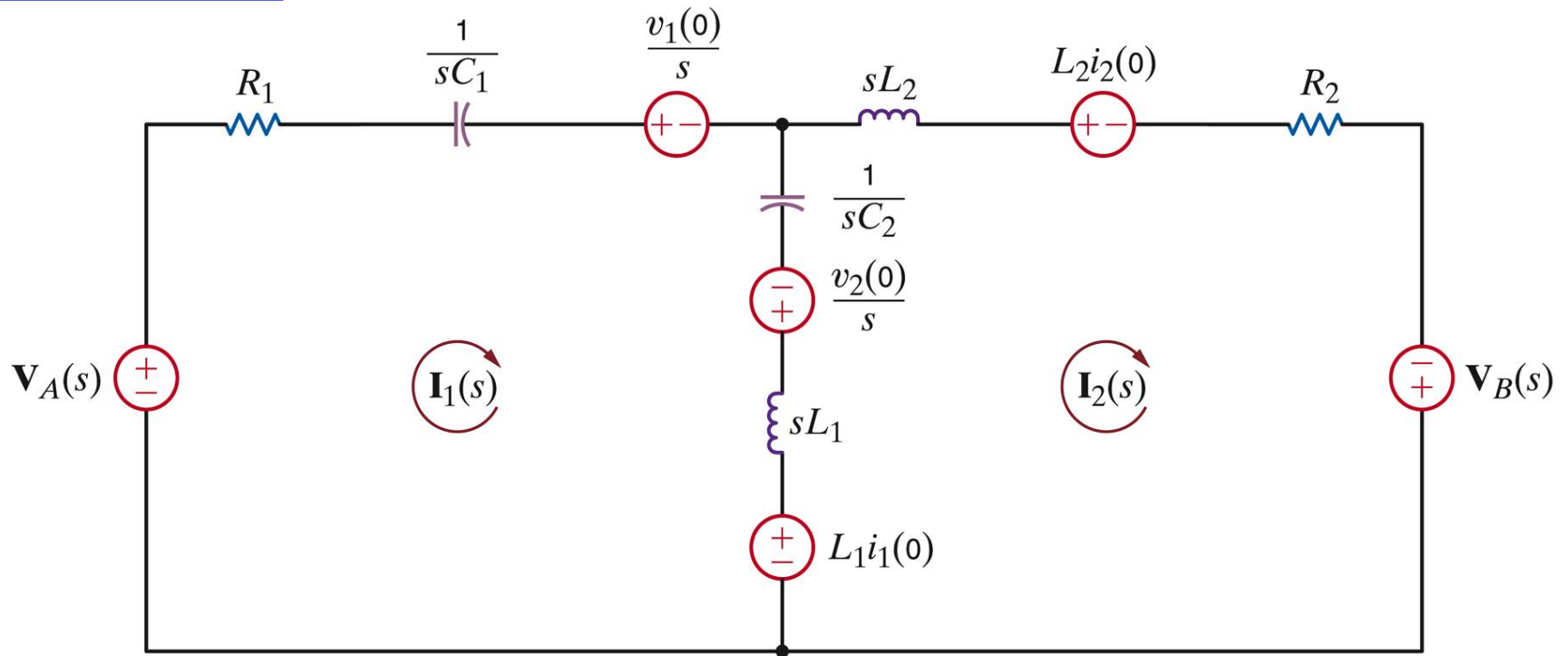
ÖRNEK

Çevre denklemlerini s-düzleminde yazın



Çevre sayısını arttırmayınız





Cevre 1

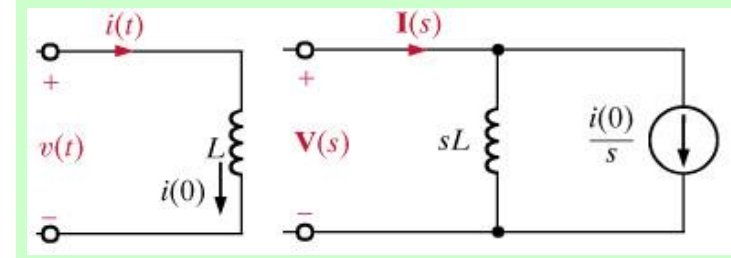
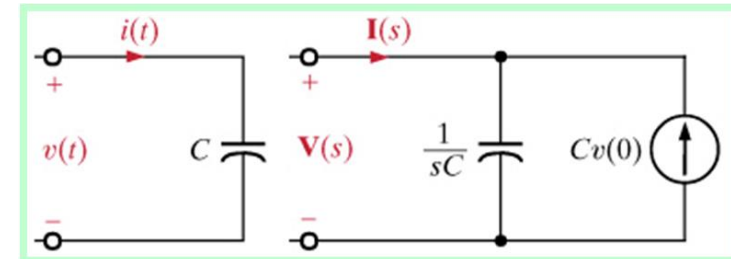
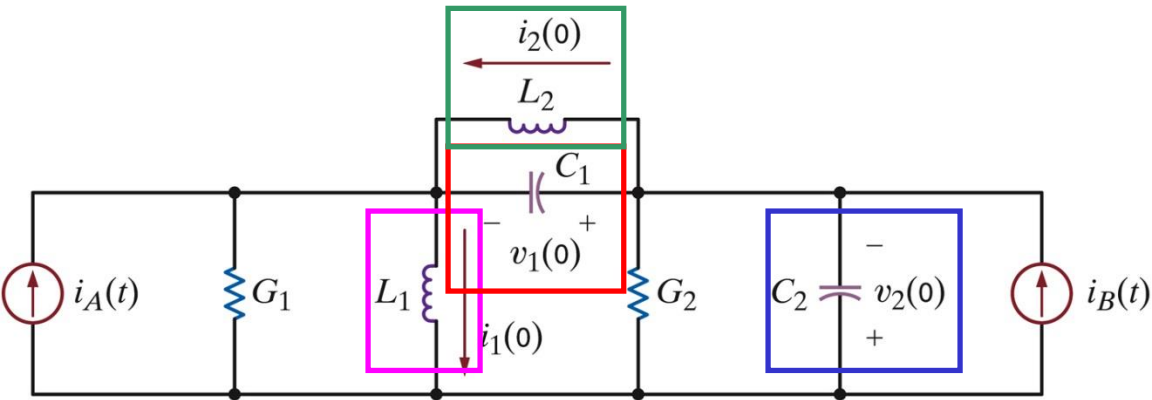
$$V_A(s) - \frac{v_1(0)}{s} + \frac{v_2(0)}{s} - L_1 i_1(0) = R_1 I_1(s) + \frac{1}{C_1 s} I_1(s) + \frac{1}{C_2 s} (I_1(s) - I_2(s)) + L_1 s (I_1(s) - I_2(s))$$

Cevre 2

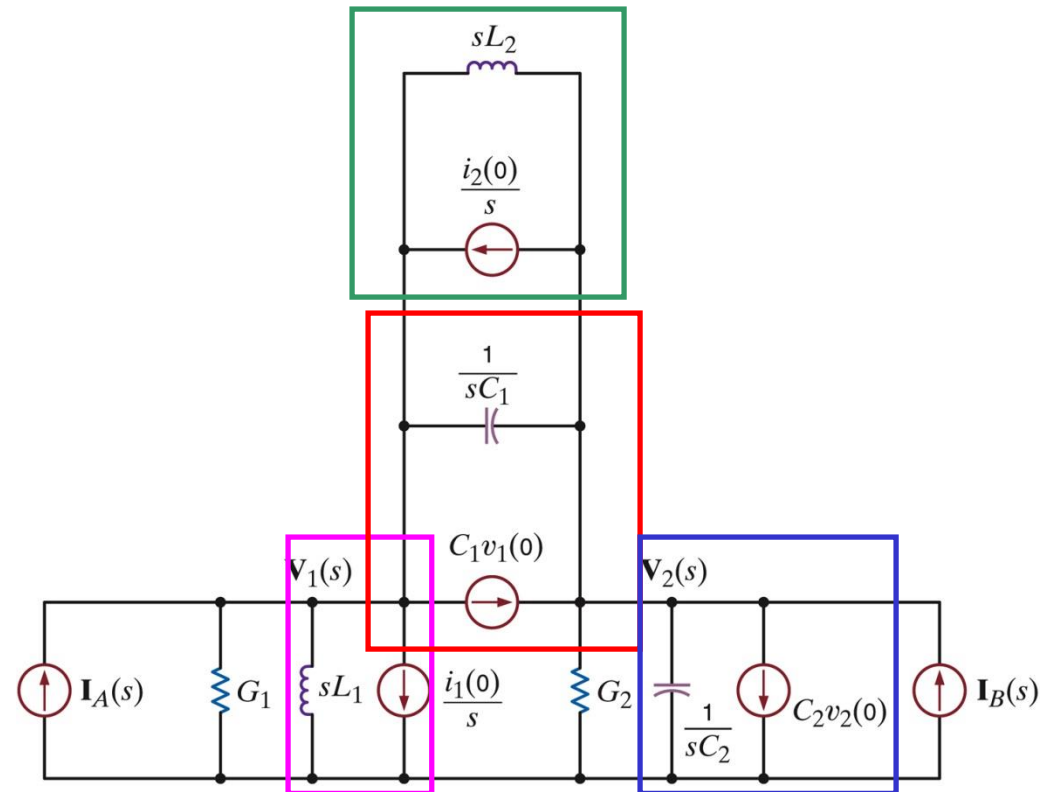
$$L_1 i_1(0) - \frac{v_2(0)}{s} - L_2 i_2(0) + V_B(s) = L_1 s (I_2(s) - I_1(s)) + \frac{1}{C_2 s} (I_2(s) - I_1(s)) + (L_2 s + R_2) I_2(s)$$

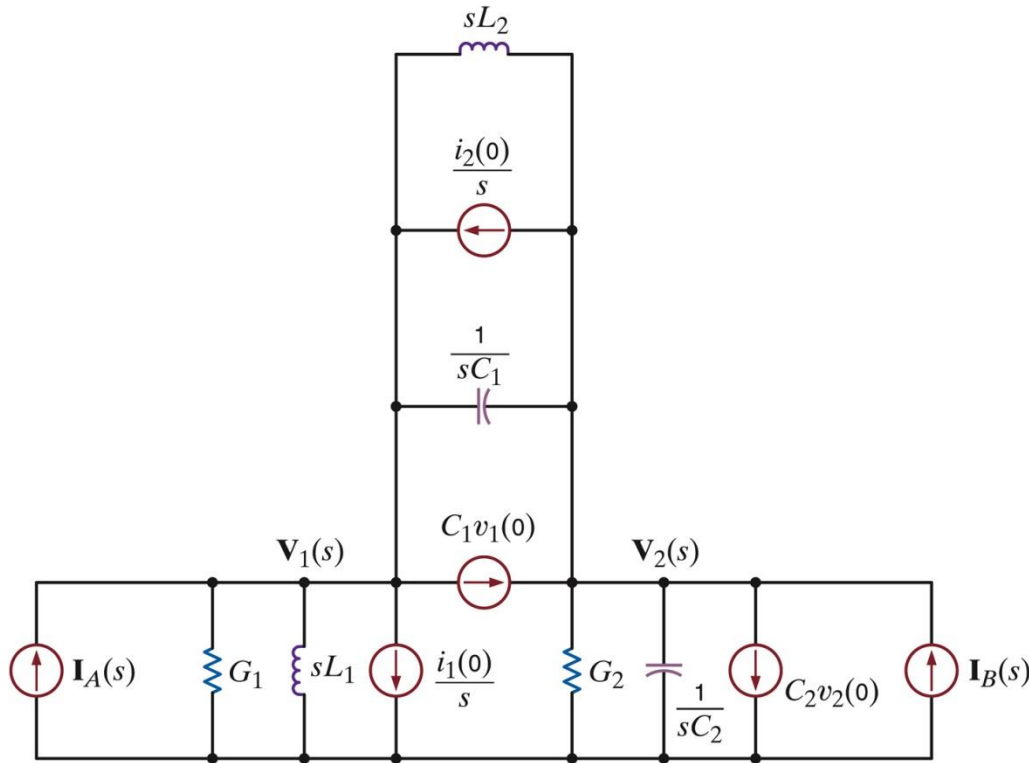
ÖRNEK

Düğüm denklemlerini s-düzleminde yazın



Düğüm sayısını arttırmayınız





Düğüm V_1

$$I_A(s) - \frac{i_1(0)}{s} - C_1 v_1(0) + \frac{i_2(0)}{s} = \left(G_1 + \frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{L_2 s} + C_1 s \right) V_1(s) - \left(\frac{1}{L_2 s} + C_1 s \right) V_2(s)$$

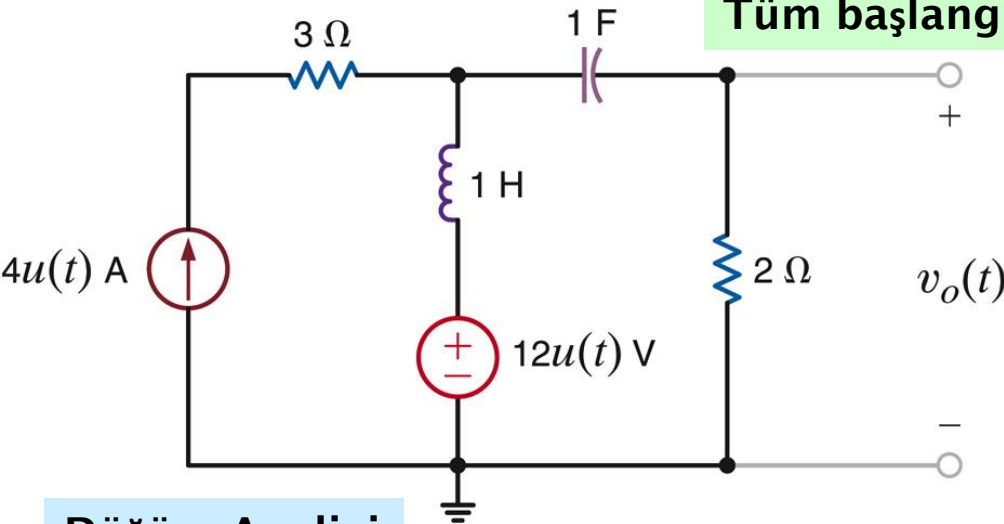
Düğüm V_2

$$I_B(s) - C_2 v_2(0) + C_1 v_1(0) - \frac{i_2(0)}{s} = \left(G_2 + C_2 s + C_1 s + \frac{1}{L_2 s} \right) V_2(s) - \left(C_1 s + \frac{1}{L_2 s} \right) V_1(s)$$

ÖRNEK

$v_o(t)$ gerilimini düğüm analizi, çevre analizi, süperpozisyon, kaynak dönüşümü, Thevenin ve Norton teoremleri ile bulunuz.

Tüm başlangıç şartlarının sıfır olduğunu varsayalım



Düğüm Analizi

Düğüm V_1

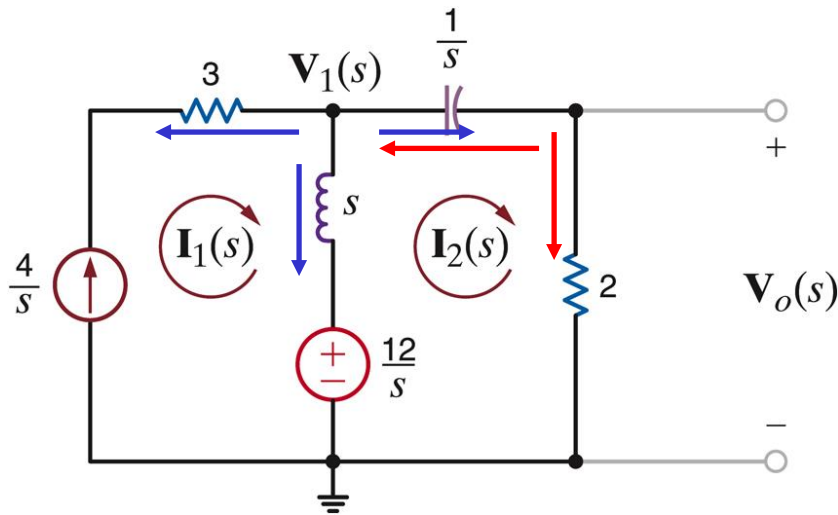
$$-\frac{4}{s} + \frac{V_1(s) - \frac{12}{s}}{s} + \frac{V_1(s) - V_o(s)}{\frac{1}{s}} = 0 \quad \times s$$

$\frac{V_1(s) \times 2}{2 + \frac{1}{s}}$

Düğüm V_o

$$\frac{V_o(s)}{2} + \frac{V_o(s) - V_1(s)}{\frac{1}{s}} = 0 \quad \times 2$$

Burada gerilim bölücü kullanılabilirdi

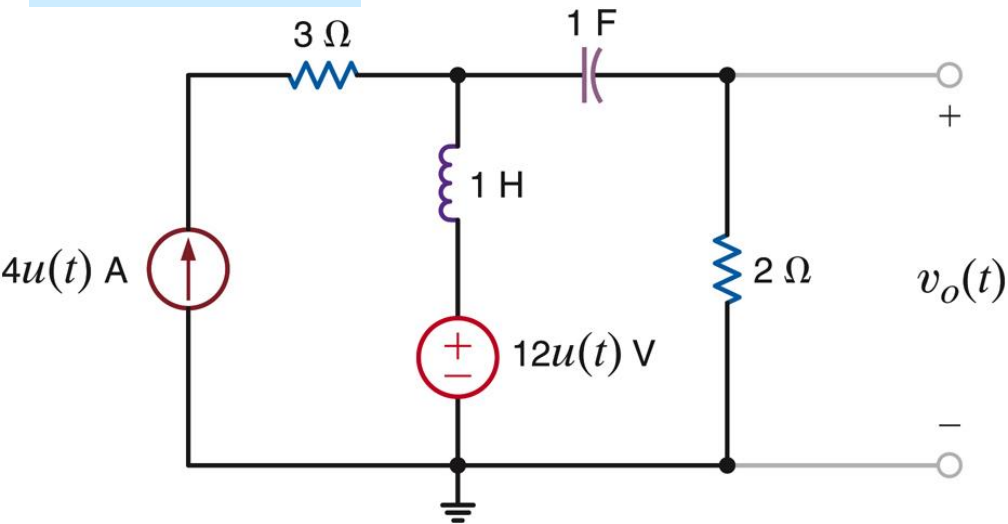


$$(1 + s^2)V_1(s) - s^2V_o(s) = \frac{4s + 12}{s} \quad \times 2s$$

$$-2sV_1(s) + (1 + 2s)V_o(s) = 0 \quad \times (1 + s^2)$$

$$V_o(s) = \frac{8(s + 3)}{(1 + s)^2}$$

Çevre Analizi



Cevre 1

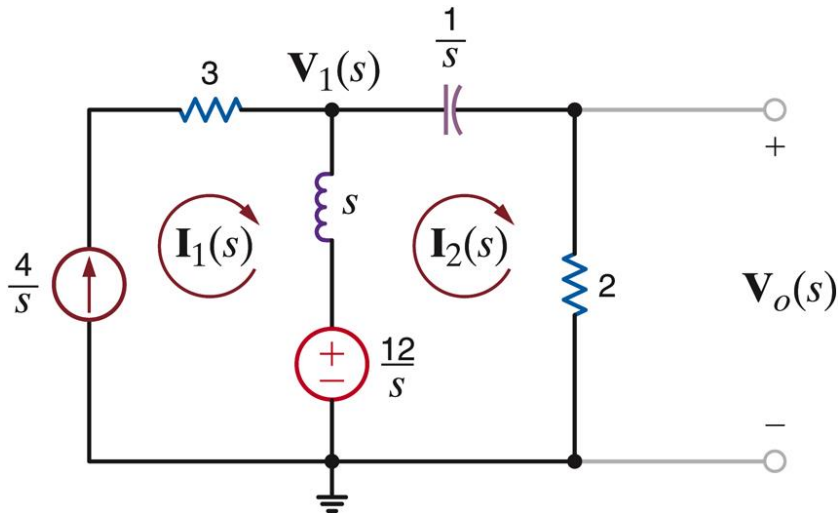
$$I_1(s) = \frac{4}{s}$$

Cevre 2

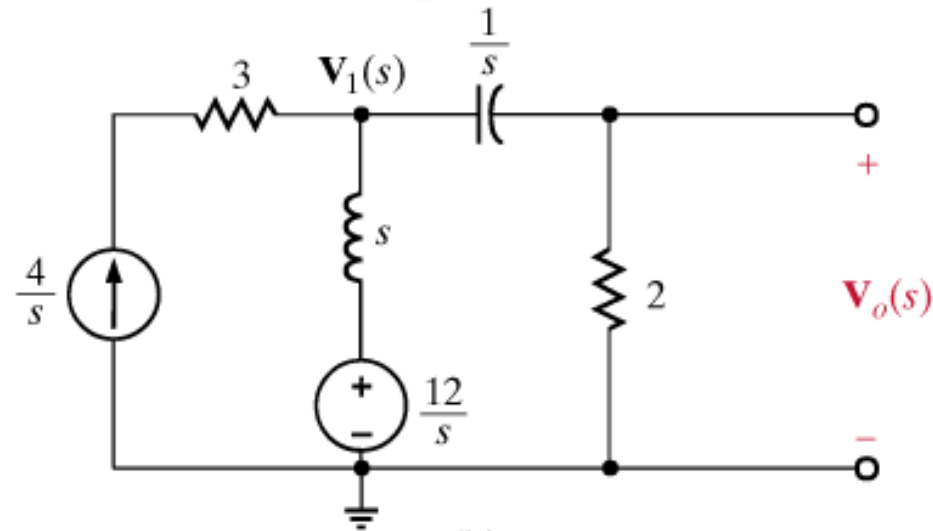
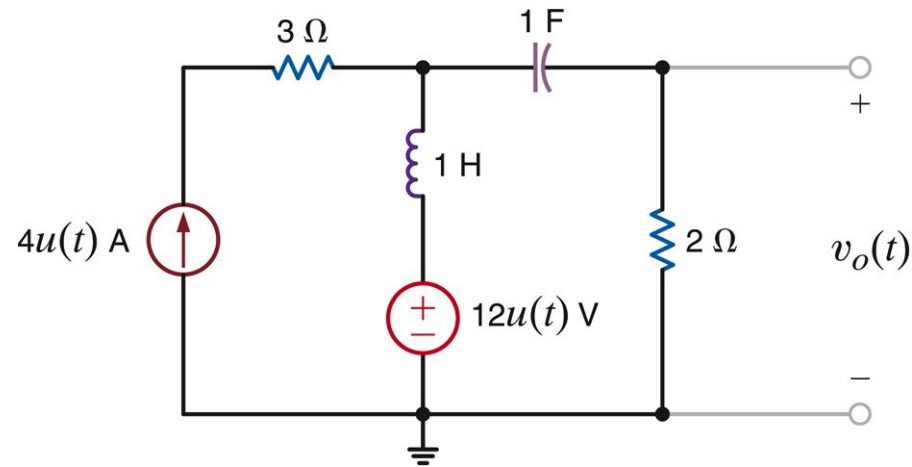
$$s(I_2(s) - I_1(s)) + \frac{1}{s}I_2(s) + 2I_2(s) = \frac{12}{s}$$

$$I_2(s) = \frac{4(s+3)}{(s+1)^2}$$

$$V_o(s) = 2I_2(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$

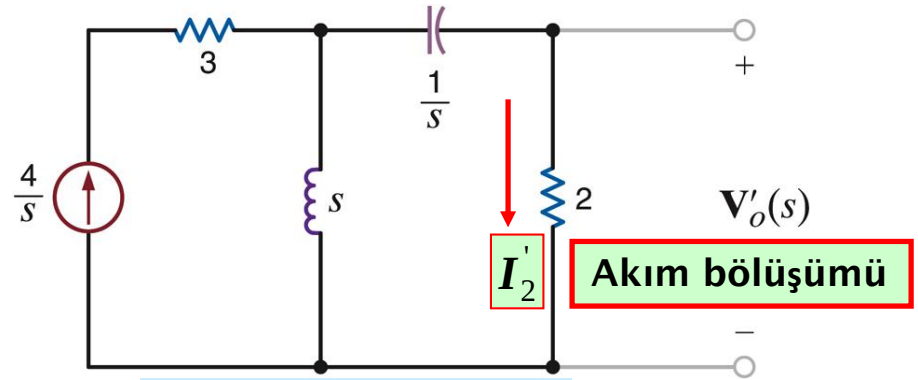


Kaynak Süperpozisyonu



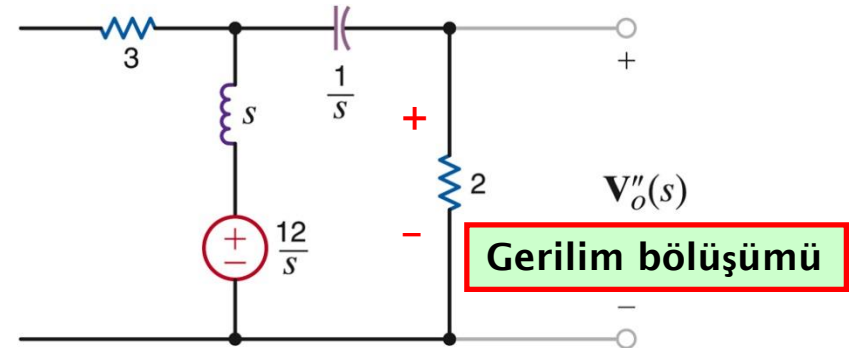
$$V_o(s) = V'_o(s) + V''_o(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$

Akım kaynağını uygulayalım



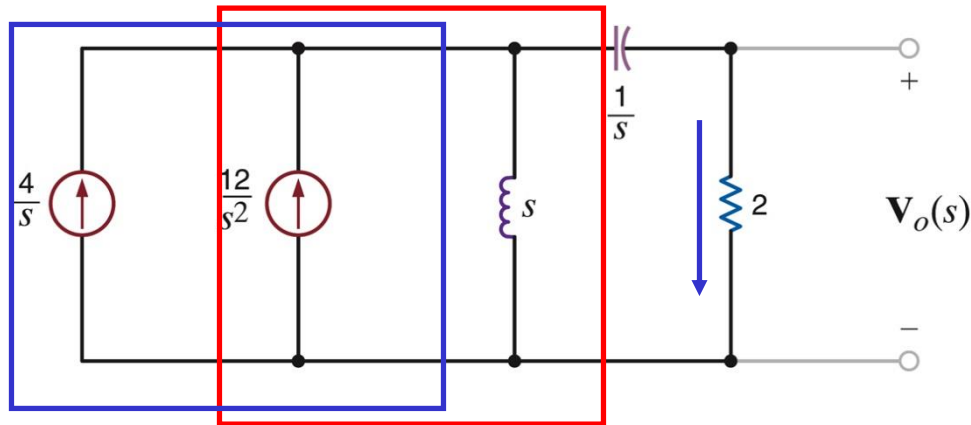
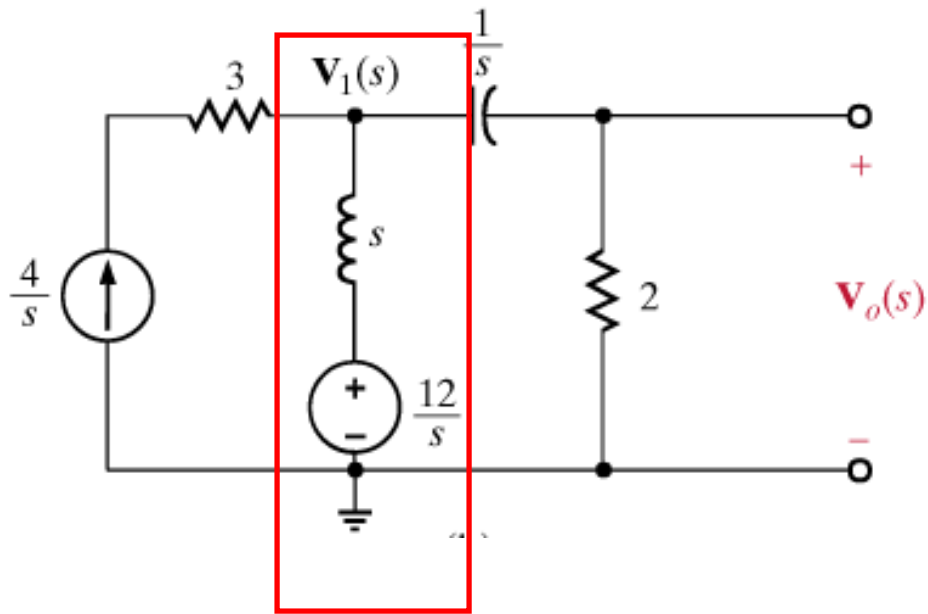
$$V'_o(s) = 2 \times \frac{s}{s + \frac{1}{s} + 2} \times \frac{4}{s}$$

Gerilim kaynağını uygulayalım



$$V''_o(s) = \frac{2}{2 + \frac{1}{s} + s} \times \frac{12}{s}$$

Kaynak Dönüşümü



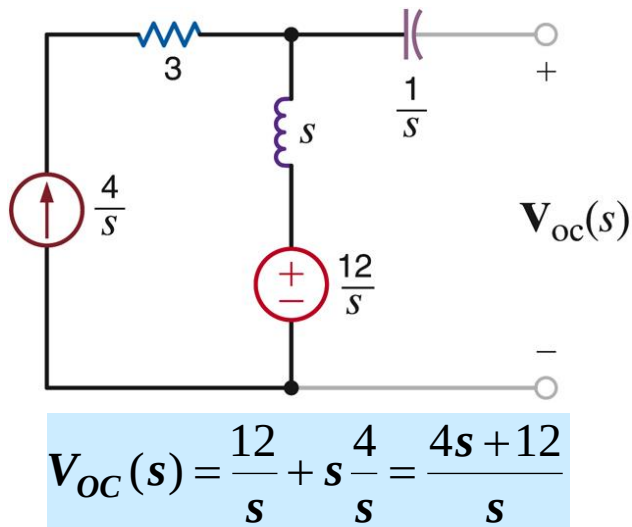
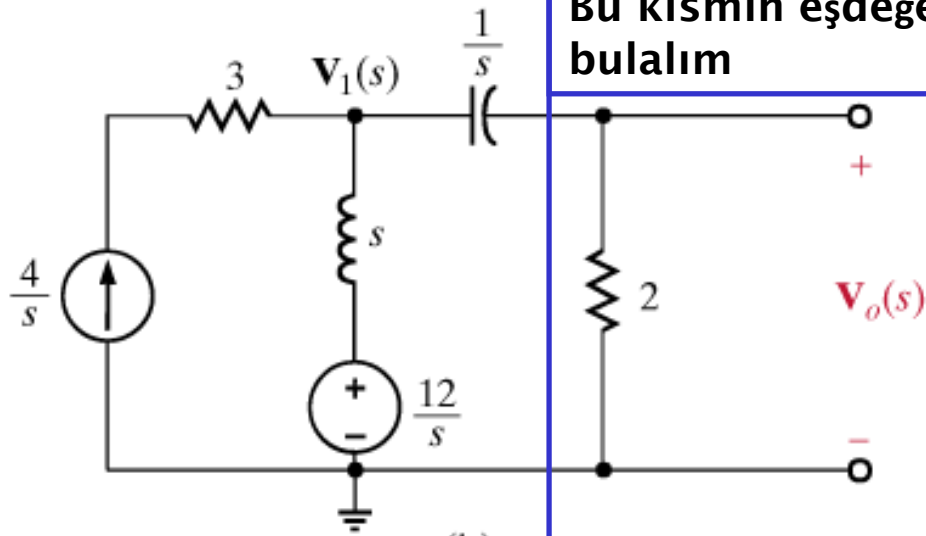
Kaynakları birleştirin ve akım bölüşümünü kullanın

$$V_o(s) = 2 \times \frac{s}{s + \frac{1}{s} + 2} \left(\frac{4}{s} + \frac{12}{s^2} \right)$$

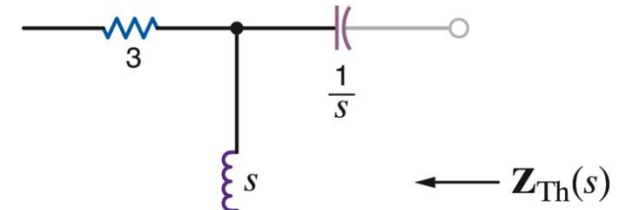
$$V_o(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$

Thevenin Teoremi ile çözüm

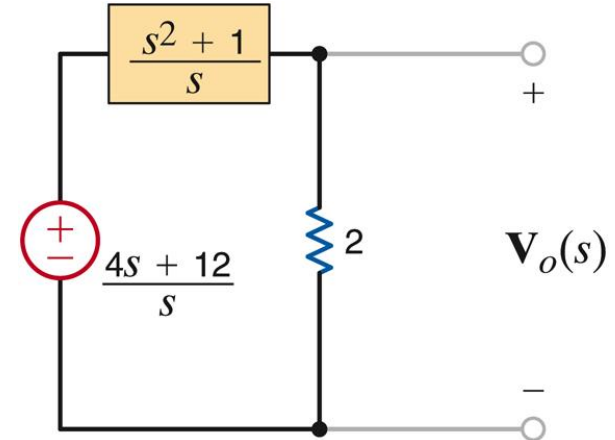
Bu kısmın eşdeğerini bulalım



Sadece bağımsız kaynaklı bir devre



$$Z_{Th} = \frac{1}{s} + s = \frac{s^2 + 1}{s}$$



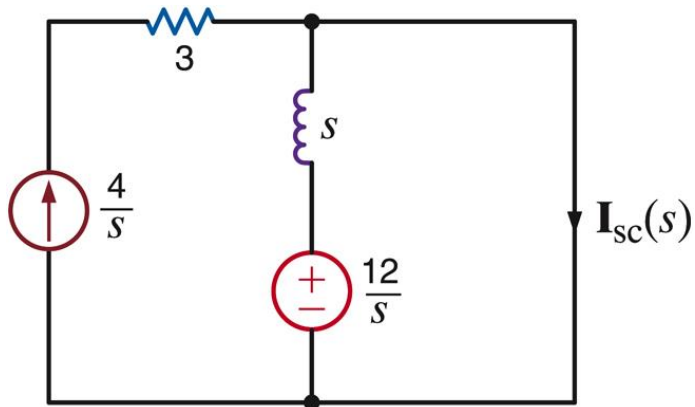
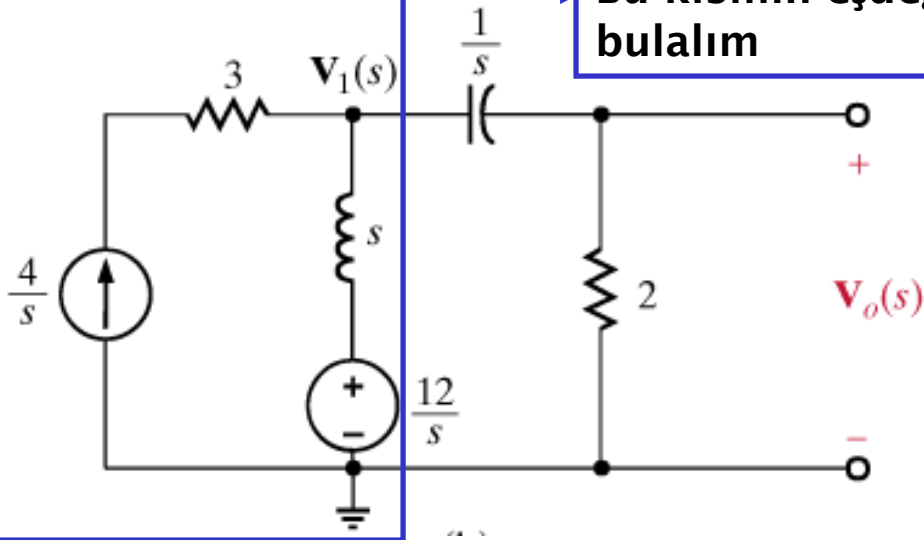
$$V_o(s) = \frac{2}{2 + \frac{s^2+1}{s}} \frac{4s+12}{s}$$

Gerilim bölüşümü

$$V_o(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$

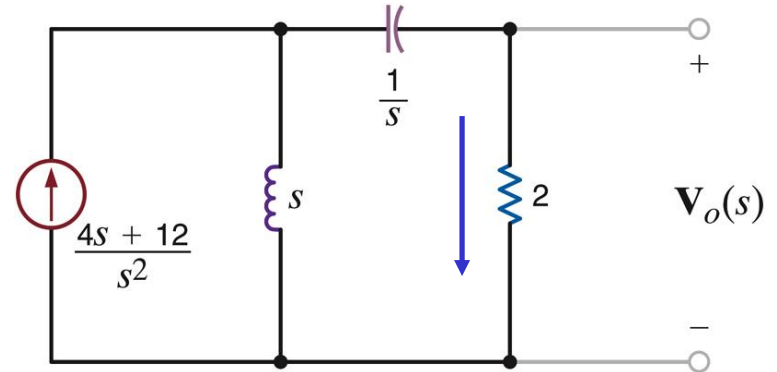
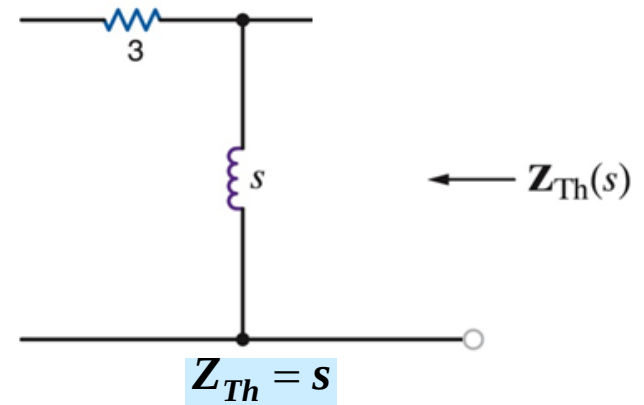
Norton Teoremi ile çözüm

Bu kısmın eşdeğerini bulalım



$$I_{sc}(s) = \frac{4}{s} + \frac{12/s}{s} = \frac{4s+12}{s^2}$$

Sadece bağımsız kaynaklı bir devre



$$V_o(s) = 2 \times \frac{s}{s + \frac{1}{s} + 2} \frac{4s+12}{s^2}$$

Akım bölüşümü

$$V_o(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$

şimdi $V_o(s)$ 'i $v_o(t)$ 'ye dönüştürelim

$$V_o(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$

$$V_o(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2} = \frac{K_{11}}{(s+1)^2} + \frac{K_{12}}{s+1}$$

$$8(s+3)|_{s=-1} = K_{11}$$

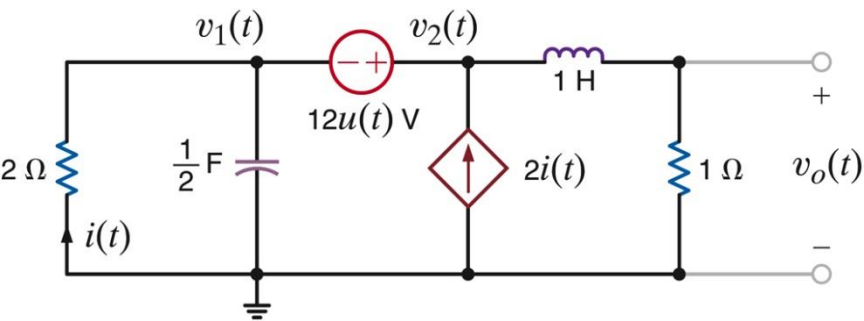
$$16 = K_{11}$$

$$\left. \frac{d}{ds} [8(s+3)] \right|_{s=-1} = K_{12}$$

$$8 = K_{12}$$

$$v_o(t) = (16te^{-t} + 8e^{-t})u(t) \text{ V}$$

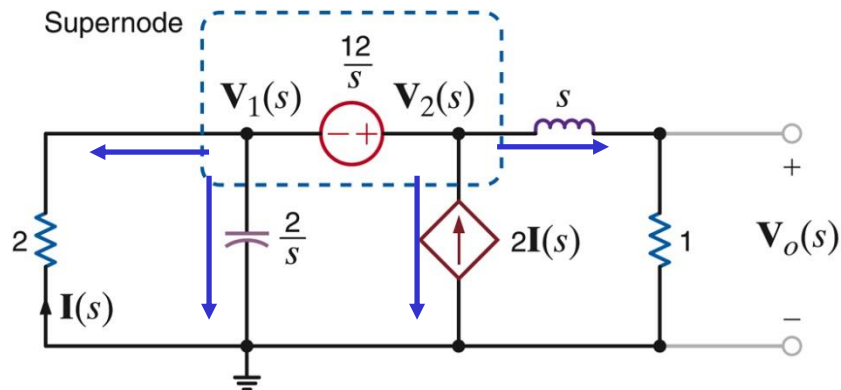
ÖRNEK $v_o(t)$ gerilimini bulun. Tüm başlangıç şartlarını sıfır kabul edin



Analiz tekniğinin seçimi:

- Üç göz, üç referans olmayan düğüm
- Referans olmayan düğümler arasında bir gerilim kaynağı -**süper düğüm**
- Bir akım kaynağı. Bilinen bir çevre akımı veya **süper çevre**
- Eğer v_2 bilinirse v_o gerilim bölüşümü ile bulunabilir

Devrenin s-düzlemine aktarılması



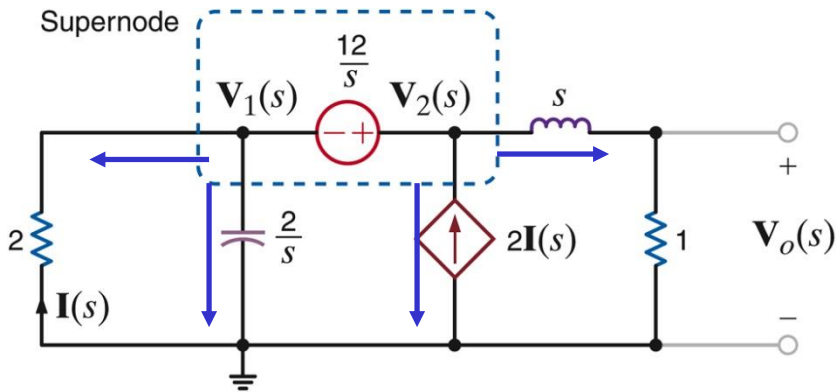
$$\text{Süperdüğüm den : } V_2(s) - V_1(s) = \frac{12}{s}$$

$$\text{Süperdüğüm e KAK : } \frac{V_1(s)}{2} + \frac{V_1(s)}{2/s} - 2I(s) + \frac{V_2(s)}{s+1} = 0$$

$$\text{Kontrol degiskeni : } I(s) = -\frac{V_1(s)}{2}$$

$$\text{Gerilim bölüşümü : } V_o(s) = \frac{1}{s+1} V_2(s)$$

s-düzlemine aktarılmış devre



$$V_2(s) - V_1(s) = \frac{12}{s}$$

$$\frac{V_1(s)}{2} + \frac{V_1(s)}{2/s} - 2I(s) + \frac{V_2(s)}{s+1} = 0$$

$$I(s) = -\frac{V_1(s)}{2}$$

$$V_o(s) = \frac{1}{s+1} V_2(s)$$

Cebirsel işlemleri yapalım

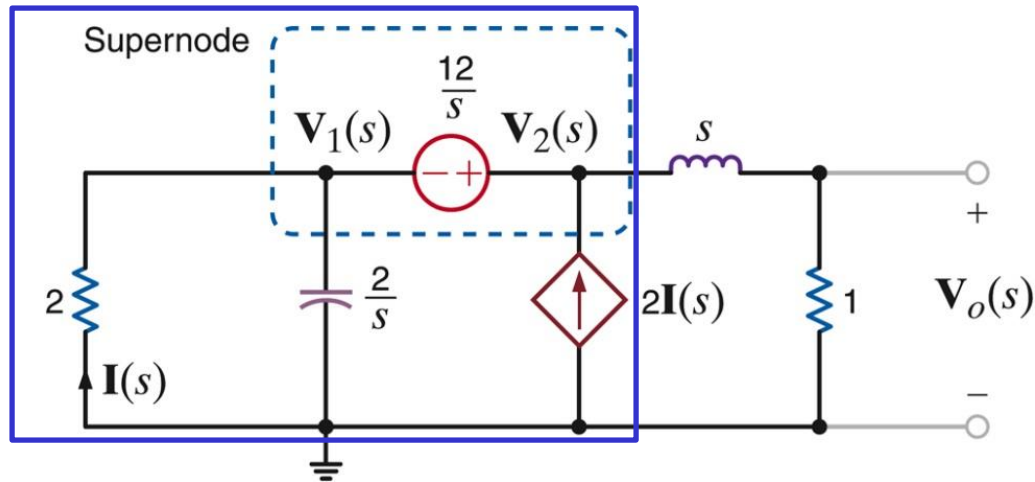
$$V_1(s) = V_2(s) - 12/s$$

$$I(s) = -V_2(s)/2 + 6/s$$

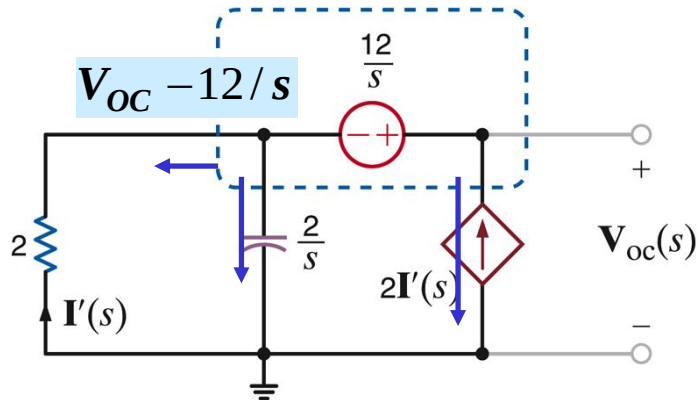
$$(1/2)(s+1)(V_2(s) - 12/s) - 2(-V_2(s)/2 + 6/s) + V_2(s)/(s+1) = 0$$

$$V_2(s) = \frac{12(s+1)(s+3)}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

$$V_o(s) = \frac{12(s+3)}{s(s^2 + 4s + 5)}$$



- Bağımlı kaynağı ve kontrol değişkenini aynı alt devrede tutun.
- Mümkün olduğunca alt devreyi sade hale getirmeye çalışın.
- Thevenin eşdeğerine dönüştürdükten sonra gerilim bölücü ile sonuca gidin

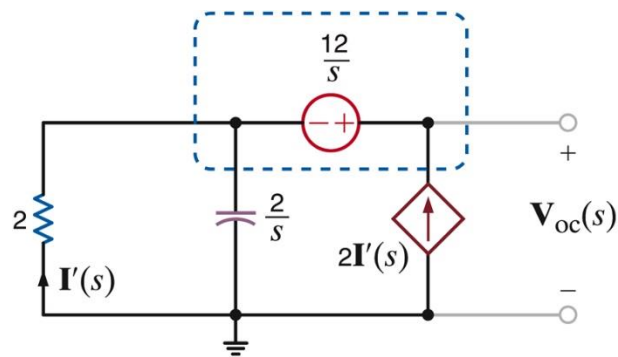


$$\frac{V_{OC} - 12/s}{2} + \frac{V_{OC} - 12/s}{2/s} - 2I' = 0$$

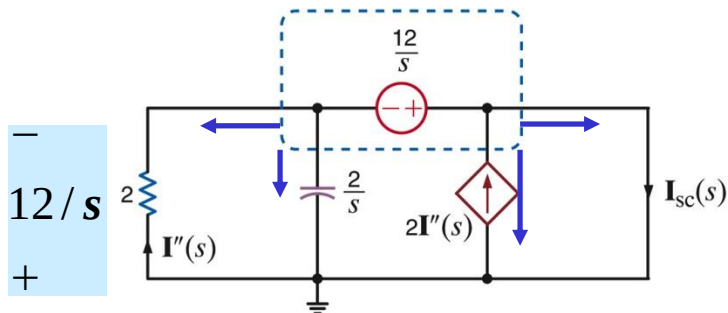
$$I' = -\frac{V_{OC} - 12/s}{2}$$

$$-I' + (-2I')/(2/s) - 2I' = 0 \Rightarrow I' = 0$$

$$V_{OC}(s) = \frac{12}{s}$$



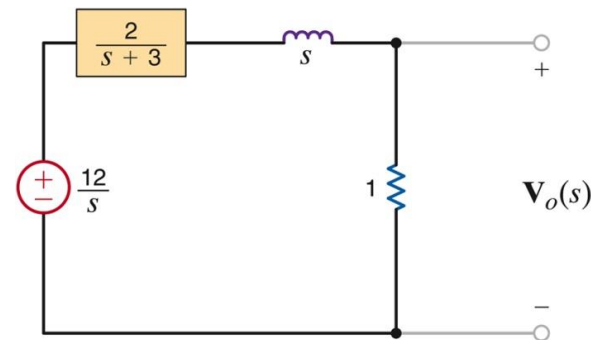
Thevenin empedansını (Z_{TH}) bulalım



$$I_{SC} - 2I'' - I'' - 2I''/(2/s) = 0 \quad I'' = 6/s$$

$$I_{SC} = \frac{6(s+3)}{s}$$

$$Z_{TH} = \frac{V_{OC}(s)}{I_{SC}(s)} = \frac{2}{s+3}$$



$$V_o(s) = \frac{1}{1+s+\frac{2}{s+3}} \times \frac{12}{s}$$

$$V_o(s) = \frac{12(s+3)}{s(s^2+4s+5)}$$

S-düzleminde analiz ile, çıkış geriliminin Laplace dönüşümünü elde ettik

$$V_o(s) = \frac{12(s+3)}{s(s^2+4s+5)}$$

$$s^2 + 4s + 5 = (s + 2 - j1)(s + 2 + j1)$$

$$V_o(s) = \frac{12(s+3)}{s(s+2-j1)(s+2+j1)} = \frac{K_o}{s} + \frac{K_1}{(s+2-j1)} + \frac{K_1^*}{(s+2+j1)}$$

$$\frac{K_1}{(s+\alpha-j\beta)} + \frac{K_1^*}{(s+\alpha+j\beta)} \leftrightarrow 2|K_1|e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \angle K_1)u(t)$$

$$K_o = sV_o(s)|_{s=0} = 36/5$$

$$K_1 = (s+2-j1)V_o(s)|_{s=-2+j1} = \frac{12(1+j1)}{(-2+j1)(j2)} = \frac{12\sqrt{2}\angle 45^\circ}{\sqrt{5}\angle 153.43^\circ (2\angle 90^\circ)}$$

$$= 3.79\angle -198.43^\circ = 3.79\angle 161.57^\circ$$

$$v_o(t) = \left(\frac{36}{5} + 7.59e^{-2t} \cos(t + 161.57^\circ) \right) u(t) V$$

S-düzleminde analiz ile, çıkış geriliminin Laplace dönüşümünü elde ettik

$$V_o(s) = \frac{12(s+3)}{s(s^2+4s+5)} \quad s^2+4s+5 = (s+2-j1)(s+2+j1) = (s+2)^2+1$$

ikinci dereceden faktörler de kullanılabilir...

$$V_o(s) = \frac{12(s+3)}{s[(s+2)^2+1]} = \frac{C_o}{s} + \frac{C_1(s+2)}{(s+2)^2+1} + \frac{C_2}{(s+2)^2+1}$$

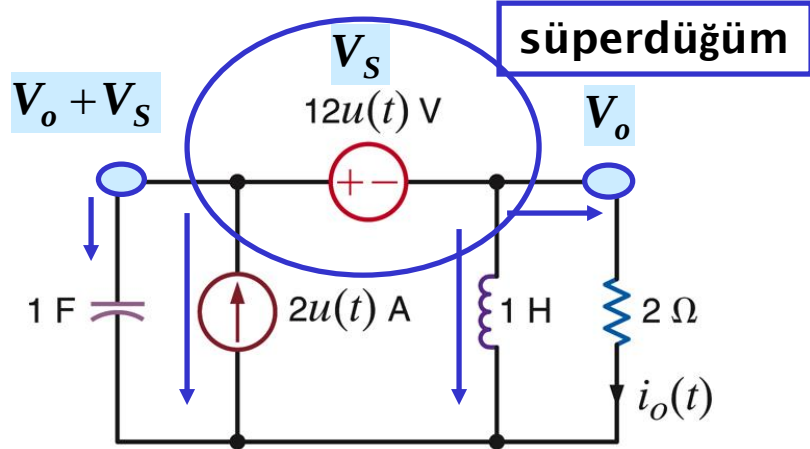
$$\frac{C_1(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{C_2\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \leftrightarrow e^{-\alpha t}[C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t]u(t)$$

$$C_o = sV_o(s)|_{s=0} = 36/5$$

$$12(s+3) = C_o((s+2)^2+1) + s[C_1(s+2) + C_2] \quad s = -2 \Rightarrow 12 = C_o - 2C_2 \Rightarrow C_2 = 36/10 - 6 = -12/5$$

$$s^2 \text{'nin esitlik katsayıları} : 0 = C_o + C_1 \Rightarrow C_1 = -36/5$$

$$v_o(t) = \left[\frac{36}{5}(1 - e^{-2t} \cos t) - \frac{12}{5}e^{-2t} \sin t \right] u(t) \text{ V}$$

ÖRNEKDüğüm denklemleri ile $i_o(t)$ akımını bulunuz

Sıfır başlangıç şartlarını varsayalım

Süperdüğüme KAK uygulayalım
(devre s-düzlemindeymiş gibi)

$$Cs(V_o(s) + V_s(s)) - \frac{2}{s} + \frac{V_o(s)}{Ls} + \frac{V_o(s)}{2} = 0$$

$$V_s(s) = \frac{12}{s}, \quad I_o(s) = \frac{V_o(s)}{2}$$

Cebirsel işlemleri yapalım

$$I_o(s) = \frac{1-6s}{s^2 + 0.5s + 1} = \frac{1-6s}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}$$

$$I_o(s) = \frac{1-6s}{\left(s + \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\left(s + \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)} = \frac{K_1}{\left(s + \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)} + \frac{K_1^*}{\left(s + \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)}$$

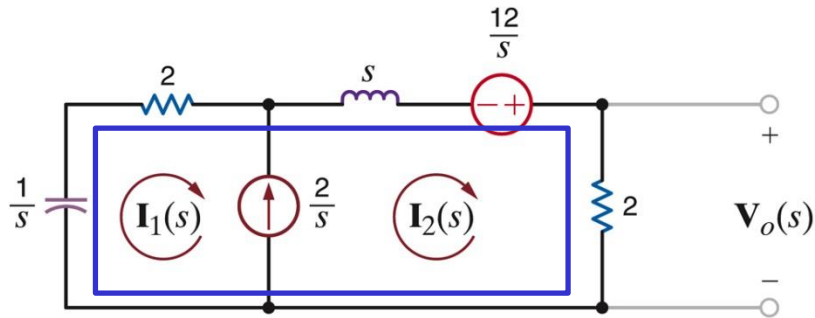
$$I_o(s) = \frac{1-6s}{\left(s + \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\left(s + \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)} = \frac{K_1}{\left(s + \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)} + \frac{K_1^*}{\left(s + \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)}$$

$$\frac{K_1}{(s + \alpha - j\beta)} + \frac{K_1^*}{(s + \alpha + j\beta)} \leftrightarrow 2 |K_1| e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \angle K_1) u(t)$$

$$K_1 = \left(s + \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}\right) I_o(s) \Big|_{s = -\frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1-6\left(-\frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)}{2j\frac{\sqrt{15}}{4}}$$

$$K_1 = \frac{6.33 \angle -66.72^\circ}{0.97 \angle 90^\circ} = 6.53 \angle -156.72^\circ$$

$$i_o(t) = 13.06 e^{-\frac{t}{4}} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{4} t - 156.72^\circ\right) u(t) \text{ A}$$

ÖRNEKÇevre denklemleri ile $v_o(t)$ gerilimini bulunuz

süperçevre

$$I_2 - I_1 = \frac{2}{s}$$

Süper çevreye KGK uygulayalım

$$\frac{1}{s}I_1 + 2I_1 + sI_2 - \frac{12}{s} + 2I_2 = 0$$

 I_2 için çözelim

$$I_2(s) = \frac{16s + 2}{s(s^2 + 4s + 1)} = \frac{16s + 2}{s(s + 0.27)(s + 3.73)}$$

$$I_2(s) = \frac{16s + 2}{s(s^2 + 4s + 1)} = \frac{16s + 2}{s(s + 0.27)(s + 3.73)}$$

Ters dönüşümü yapalım

$$I_2(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + 0.27} + \frac{K_2}{s + 3.73}$$

$$K_0 = sI_2(s)|_{s=0} = 2$$

$$K_1 = (s + 0.27)I_2(s)|_{s=-0.27} = \frac{16(-0.27) + 2}{(-0.27)(-0.27 + 3.73)} = 2.48$$

$$K_2 = (s + 3.73)I_2(s)|_{s=-3.73} = \frac{16(-3.73) + 2}{(-3.73)(-3.73 + 0.27)} = -4.47$$

$$i_2(t) = \left(2 + 2.48e^{-0.27t} - 4.47e^{-3.73t}\right)u(t)A$$

$$v_o(t) = 2i_2(t)V$$

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ KULLANARAK GEÇİCİ DEVRE ANALİZİ

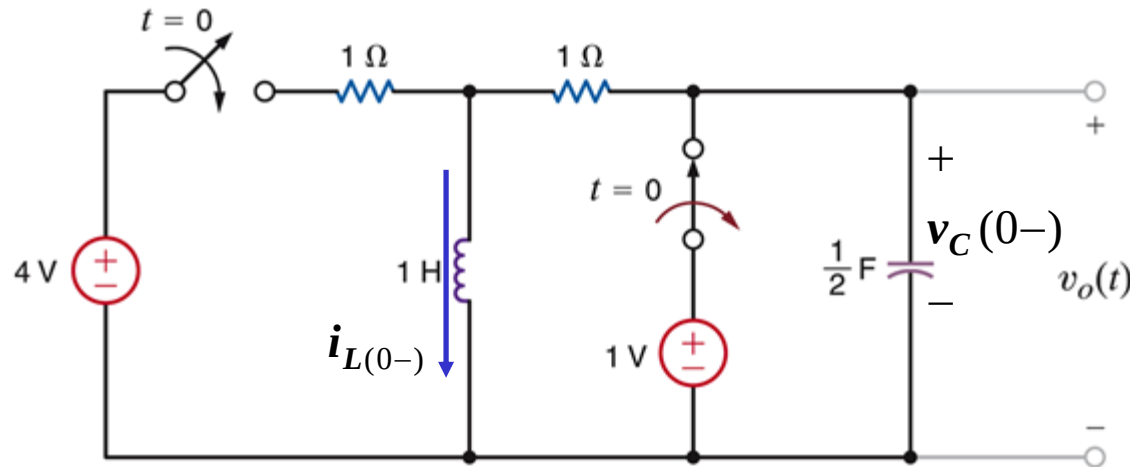
Geçici durum çalışmasında, (özellikle anahtarların durum değiştirmesi sırasında) başlangıç şartlarının belirlenmesi önemlidir.

Bunun için şu özelliklere dikkat etmek gerekir:

- 1. Kapasitör uçlarındaki gerilim anlık olarak değişemez**
- 2. indüktörden geçen akım anlık olarak değişemez**

ÖRNEK

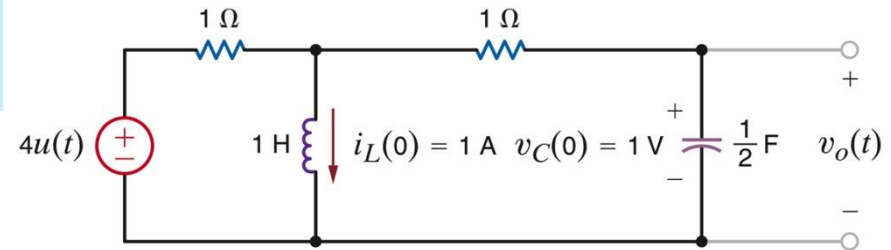
$t > 0$ için, $v_o(t)$ gerilimini bulunuz



$t < 0$ için kalıcı durumda olduğunu varsayın ve kapasitörlerdeki gerilim ile indüktörlerden geçen akımı belirleyin

DA durumunda kapasitörler açık devre
indüktörler kısa devredir

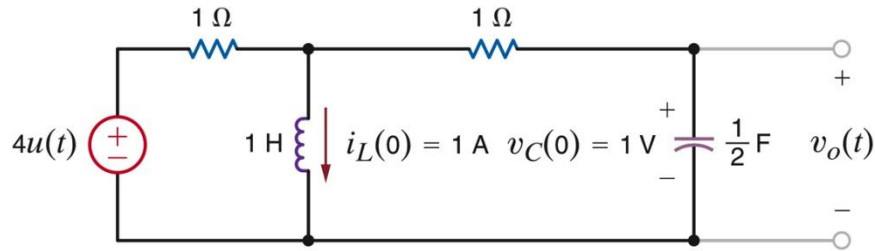
$$v_C(0-) = 1V, i_L(0-) = 1A$$



$t > 0$ için devre

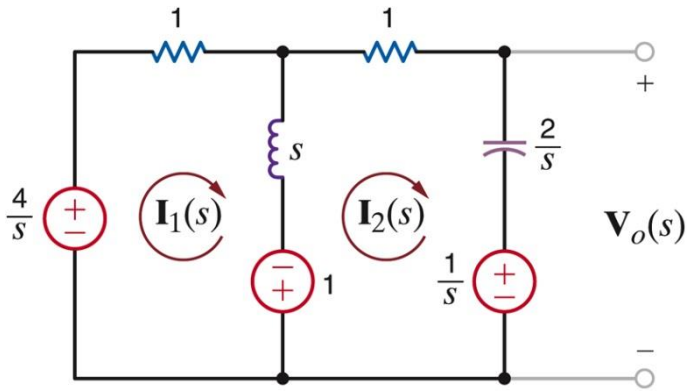
ÖRNEK - devamı

$t > 0$ için, $v_o(t)$ gerilimini bulunuz



$t > 0$ için devre

Devreyi s-düzlemine aktaralım



Çevre analizini kullanalım

$$(s+1)I_1 - sI_2 = \frac{4}{s} + 1 \quad \times s$$

I_2 için çöz

$$-sI_1 + (s+1+\frac{2}{s})I_2 = -\frac{1}{s} - 1 \quad \times (s+1)$$

$$I_2(s) = \frac{2s-1}{2s^2+3s+2}$$

$$V_o(s) = \frac{2}{s}I_2(s) + \frac{1}{s}$$

$$V_o(s) = \frac{2s+7}{2s^2+3s+2} = \frac{s+\frac{7}{2}}{s^2+\frac{3}{2}s+1}$$

$t > 0$ için, $v_o(t)$ gerilimini bulunuz

$$V_o(s) = \frac{s + \frac{7}{2}}{s^2 + \frac{3}{2}s + 1}$$

şimdi ters dönüşümü gerçekleştirelim

$b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ karmaşık eşlenik kökler

$$V_o(s) = \frac{K_1}{s + \frac{3}{4} - j\frac{\sqrt{7}}{4}} + \frac{K_1^*}{s + \frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

$$K_1 = \left(s + \frac{3}{4} - j\frac{\sqrt{7}}{4} \right) V_o(s) \Big|_{s = -\frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

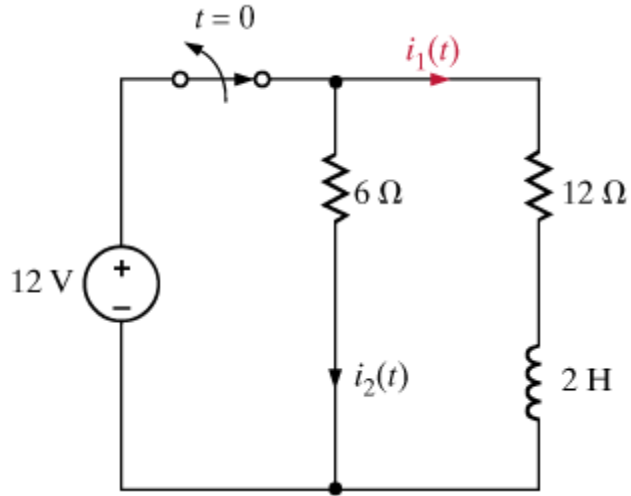
$$K_1 = 2.14 \angle -76.5^\circ$$

$$\frac{K_1}{(s + \alpha - j\beta)} + \frac{K_1^*}{(s + \alpha + j\beta)} \leftrightarrow 2 |K_1| e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \angle K_1) u(t)$$

$$v_o(t) = [4.28 e^{\frac{-3}{4}t} \cos(\frac{\sqrt{7}}{4}t - 76.5^\circ)] u(t) V$$

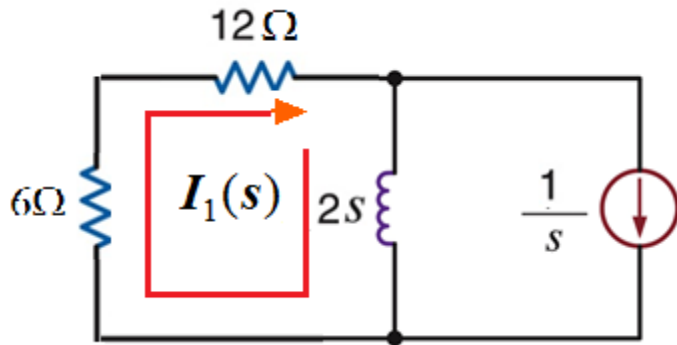
ÖRNEK

$t > 0$ için, $i_1(t)$ akimini bulunuz



indüktörden geçen başlangıç akımı

$$i_L(0-) = i_L(0+) = 1A$$



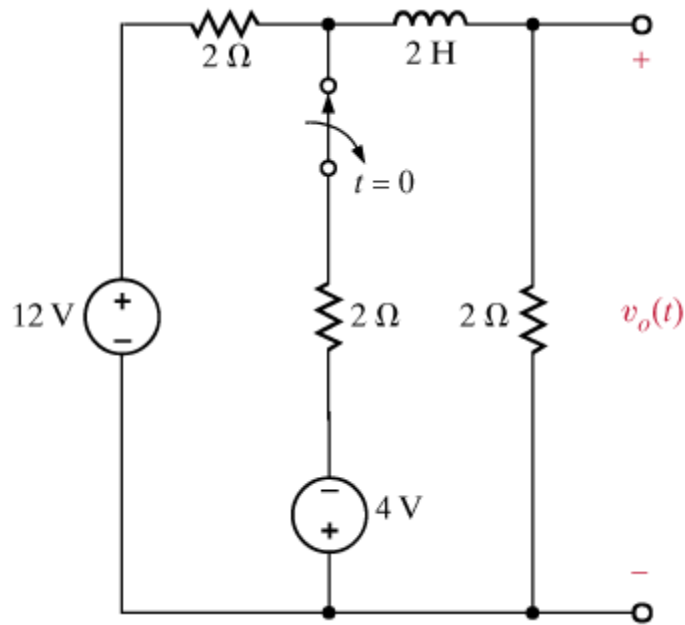
$$I_1(s) = \frac{2}{2s + 18}$$

$$I_1(s) = \frac{1}{s + 9}$$

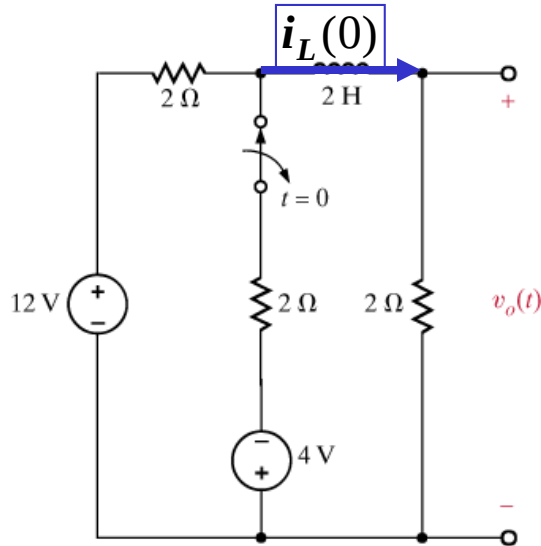
$$i_1(t) = e^{-9t} u(t) A$$

ÖRNEK

$t > 0$ için, $v_o(t)$ gerilimini bulunuz



indüktörden geçen başlangıç akımını bulun

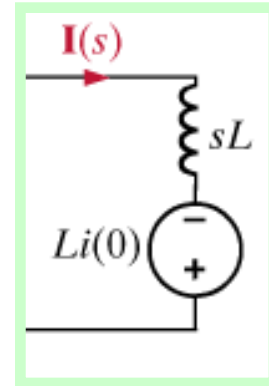
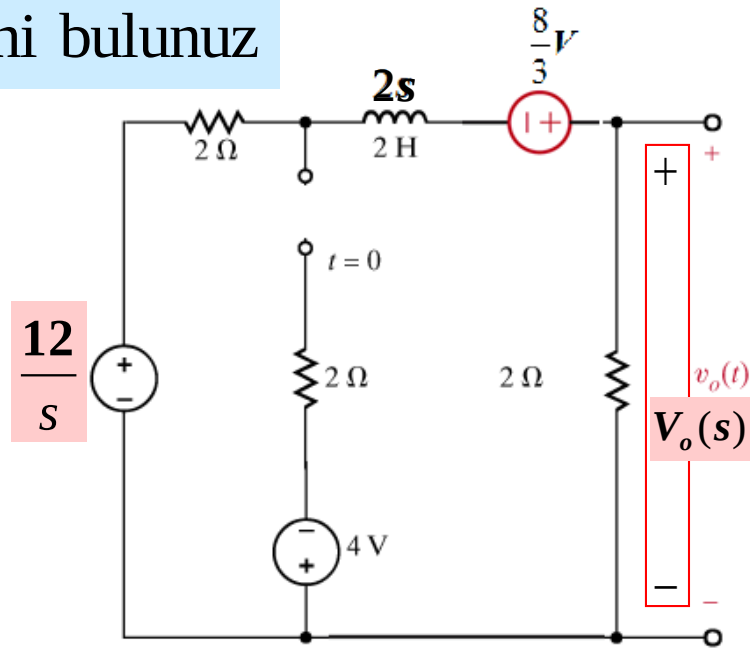


Süperpozisyon kullanın

$$i_{12V} = 2A$$

$$i_{4V} = -\frac{2}{3}A$$

$$i_L(0) = \frac{4}{3}A$$



$$V_o(s) = \frac{2}{4+2s} \times \left(\frac{12}{s} + \frac{8}{3} \right) \text{ (gerilim bölüşümü)}$$

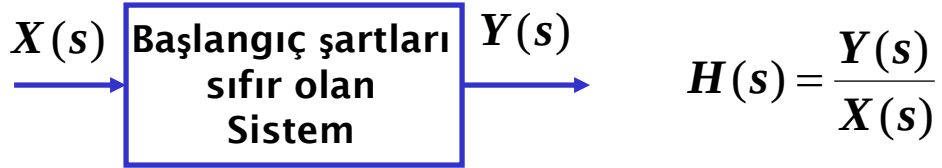
$$V_o(s) = \frac{(8s+36)}{3s(s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1 = sV_o(s)|_{s=0} = 6$$

$$K_2 = (s+2)V_o(s)|_{s=-2} = -\frac{10}{3}$$

$$v_o(t) = \left(6 - \frac{10}{3}e^{-2t} \right) u(t) V$$

TRANSFER FONKSİYONU



Sistem modeli dif. denklem ise

$$b_n \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = a_m \frac{d^m x}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x$$

Başlangıç şartları sıfır ise

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^k y}{dt^k}\right] = s^k Y(s)$$

$$b_n s^n Y(s) + \dots + b_1 s Y(s) + b_0 Y(s) = a_m s^m X(s) + \dots + a_1 s X(s) + a_0 X(s)$$

$$(b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0) Y(s) = (a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0) X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}$$

Darbe fonksiyonu için

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(s) = 1$$

TABLE 13.1 Short table of
Laplace transform pairs

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{t^n e^{-at}}{n!}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
$e^{-at} \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$

TABLE 13.2 Some useful properties of the Laplace transform

PROPERTY NUMBER	$f(t)$	$F(s)$
1. Magnitude scaling	$Af(t)$	$AF(s)$
2. Addition/subtraction	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F_2(s)$
3. Time scaling	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
4. Time shifting	$f(t - t_0)u(t - t_0), t \geq 0$ $f(t)u(t - t_0)$	$e^{-t_0s} F(s)$ $e^{-t_0s} \mathcal{L}[f(t + t_0)]$
5. Frequency shifting	$e^{-at}f(t)$	$F(s + a)$
6. Differentiation	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \cdots - s^0 f^{(n-1)}(0)$
7. Multiplication by t	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
8. Division by t	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\lambda) d\lambda$
9. Integration	$\int_0^t f(\lambda) d\lambda$	$\frac{1}{s} F(s)$
10. Convolution	$\int_0^t f_1(\lambda)f_2(t - \lambda) d\lambda$	$F_1(s)F_2(s)$