

DÜĞÜM VE ÇEVRE ANALİZ TEKNİKLERİ

Öğrenme Hedefleri

DÜĞÜM ANALİZİ
ÇEVRE ANALİZİ

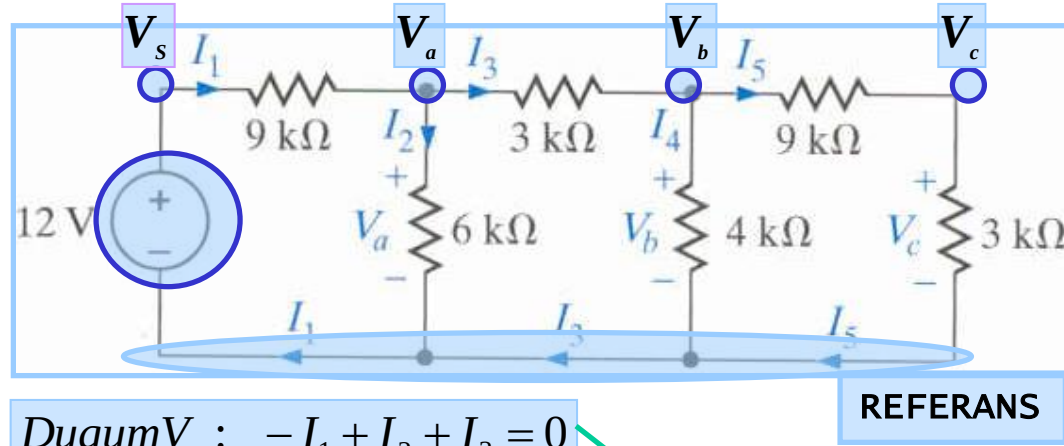
DÜĞÜM ANALİZİ

Bir devredeki bütün akım ve gerilimleri bulmak için sistematik yollardan birisidir.

Devreyi tanımlamak için kullanılan değişkenler
"Düğüm Gerilimleridir"

Her bir düğümün gerilimi
önceden seçilmiş referans düğümüne göre belirlenir

DÜĞÜM ANALİZİ STRATEJİSİ



REFERANS

$$\text{Düğüm } V_a: -I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$\frac{V_a - V_s}{9k} + \frac{V_a}{6k} + \frac{V_a - V_b}{3k} = 0$$

$$\text{Düğüm } V_b: -I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

$$\frac{V_b - V_a}{3k} + \frac{V_b}{4k} + \frac{V_b - V_c}{9k} = 0$$

$$\text{Düğüm } V_c: -I_5 + I_6 = 0$$

$$\frac{V_c - V_b}{9k} + \frac{V_c}{3k} = 0$$

1. DÜĞÜMLERİ BELİRLEYİN VE BİR TANESİNİ REFERANS OLARAK SEÇİN

2. BİLİNER DÜĞÜM GERİLİMLERİNİ BELİRLEYİN

3. HER BİR DÜĞÜME KAK UYGULAYARAK DENKLEMLERİ OLUŞTURUN

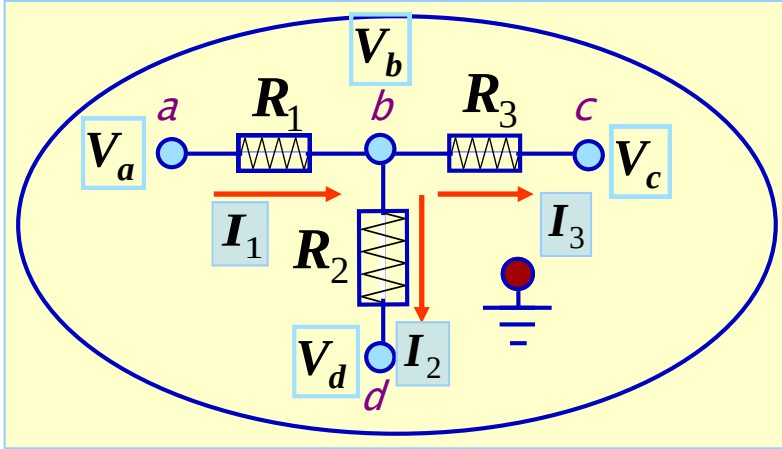
4. AKIMLARI DÜĞÜM GERİLİMLERİ İLE DEĞİŞTİRİN

VE CEBİRSEL DENKLEMLERİ ELDE EDİN ...

İPUCU: BU DENKLEMLERİ DİKKATE ALMAYIN

VE BU DENKLEMLERİ DOĞRUDAN YAZMAYI DENEYİN

BİR DÜĞÜM DENKLEMİ YAZARKEN...
HER BİR DÜĞÜMDE, AKIM YÖNLERİ GELİŞİGÜZEL
SEÇİLEBİLİR



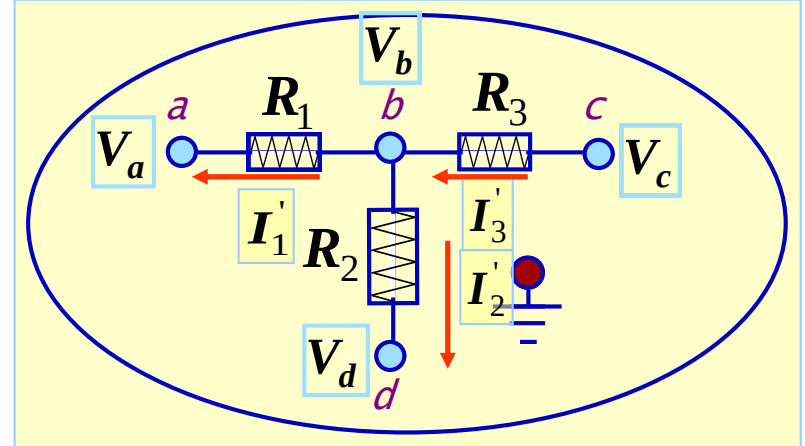
$$\sum \text{AYRILAN AKIMLAR} = 0$$

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow -\frac{V_a - V_b}{R_1} + \frac{V_b - V_d}{R_2} + \frac{V_b - V_c}{R_3} = 0$$

$$\sum \text{GELEN AKIMLAR} = 0$$

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \Rightarrow \frac{V_a - V_b}{R_1} - \frac{V_b - V_d}{R_2} - \frac{V_b - V_c}{R_3} = 0$$

KAK'NUN HERHANGİ BİR BİÇİMİNİ SEÇİN.
AKIMLAR DÜĞÜM GERİLİMLERİ CİNSİNDEN
YAZILDIĞINDA DÜĞÜM DENKLEMLERİ AYNI
VEYA EŞDEĞERDİR



$$\sum \text{AYRILAN AKIMLAR} = 0$$

$$I'_1 + I'_2 - I'_3 = 0 \Rightarrow \frac{V_b - V_a}{R_1} + \frac{V_b - V_d}{R_2} - \frac{V_c - V_b}{R_3} = 0$$

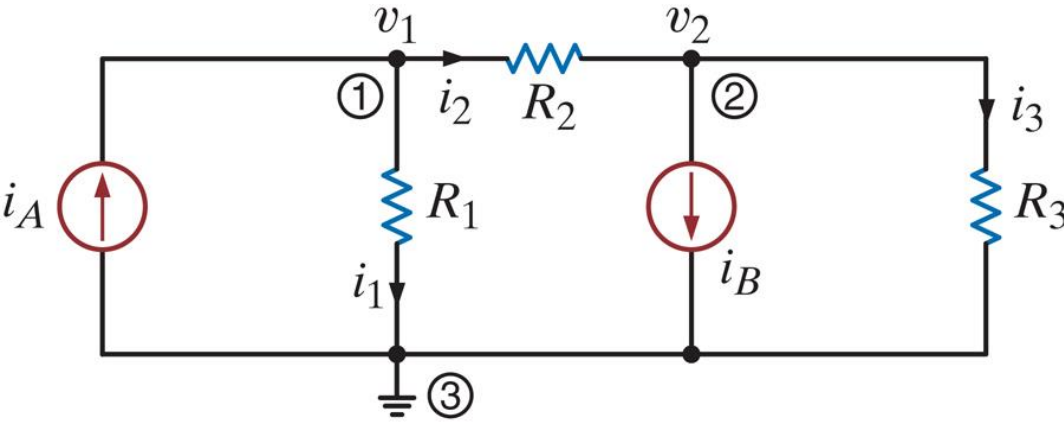
$$\sum \text{GELEN AKIMLAR} = 0$$

$$-I'_1 - I'_2 + I'_3 = 0 \Rightarrow -\frac{V_b - V_a}{R_1} - \frac{V_b - V_d}{R_2} + \frac{V_c - V_b}{R_3} = 0$$

DÜĞÜM DENKLEMLERİNİ YAZARKEN,
DENKLEMLERİ DOĞRUDAN DÜĞÜM GERİLİMLERİ CİNSİNDEN YAZIN.
BU DERSTE, AYRILAN AKIMLARIN TOPLAMI=0 BİÇİMİNDE KAK'NU KULLANILACAKTIR

AKIMLARIN REFERANS YÖNÜ DÜĞÜM DENKLEMLERİNİ ETKİLEMEZ.

SADECE BAĞIMSIZ KAYNAKLI DEVRELER



İPUCU: DİRENÇLER YERİNE İLETKENLİK KULLANILIRSA, DENKLEMLERİN YAZILIŞI DAHA BASİT OLABİLİR

DÜĞÜM1

$$-i_A + i_1 + i_2 = 0$$

İLETKENLİK KULLANILIRSA $-i_A + G_1 v_1 + G_2(v_1 - v_2) = 0$

DİRENCLERİ KULLANARAK $-i_A + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0$

Terimler yeniden düzenlenirse

$$(G_1 + G_2)v_1 - G_2 v_2 = i_A$$

DÜĞÜM 2

$$-G_2(v_1 - v_2) + i_B + G_3(v_2 - 0) = 0$$

Terimler yeniden düzenlenirse

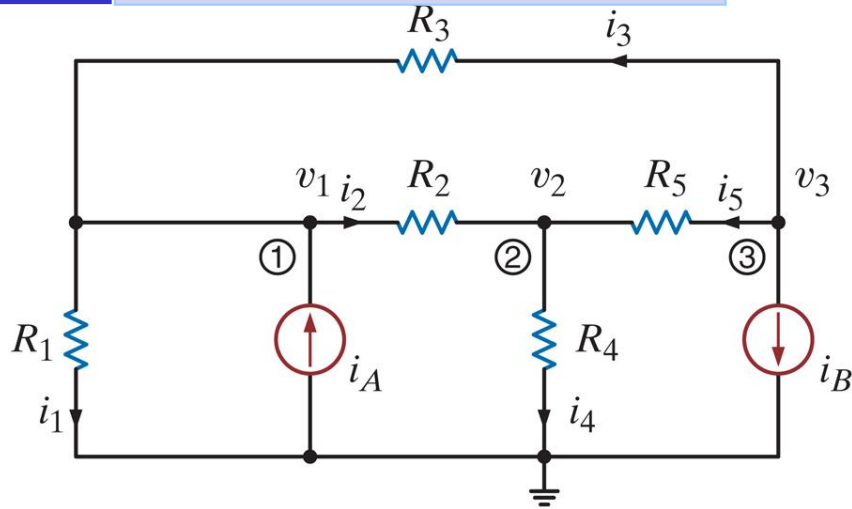
$$-G_2 v_1 + (G_2 + G_3)v_2 = -i_B$$

DEVRE İÇİN MODEL CEBİRSEL DENKLEM SİSTEMLERİDİR

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2)v_1 - G_2 v_2 &= i_A \\ -G_2 v_1 + (G_2 + G_3)v_2 &= -i_B \end{aligned}$$

Cebirsel denklem sistemlerinin çözümü, matris analizi kullanılarak daha etkin bir şekilde yapılabilir.

ÖRNEK Düğüm denklemlerini yazın



Terimler yeniden düzenlendiğinde ...

$$\begin{aligned} v_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - v_2 \frac{1}{R_2} - v_3 \frac{1}{R_3} &= i_A \\ -v_1 \frac{1}{R_2} + v_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - v_3 \frac{1}{R_5} &= 0 \\ -v_1 \frac{1}{R_3} - v_2 \frac{1}{R_5} + v_3 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) &= -i_B \end{aligned}$$

@ v_1

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{R_1} - i_A + \frac{v_1 - v_2}{R_2} - \frac{v_3 - v_1}{R_3} &= 0 \\ v_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - v_2 \frac{1}{R_2} - v_3 \frac{1}{R_3} &= i_A \end{aligned}$$

@ v_2

$$\begin{aligned} -\frac{v_1 - v_2}{R_2} + \frac{v_2}{R_4} - \frac{v_3 - v_2}{R_5} &= 0 \\ -v_1 \frac{1}{R_2} + v_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - v_3 \frac{1}{R_5} &= 0 \end{aligned}$$

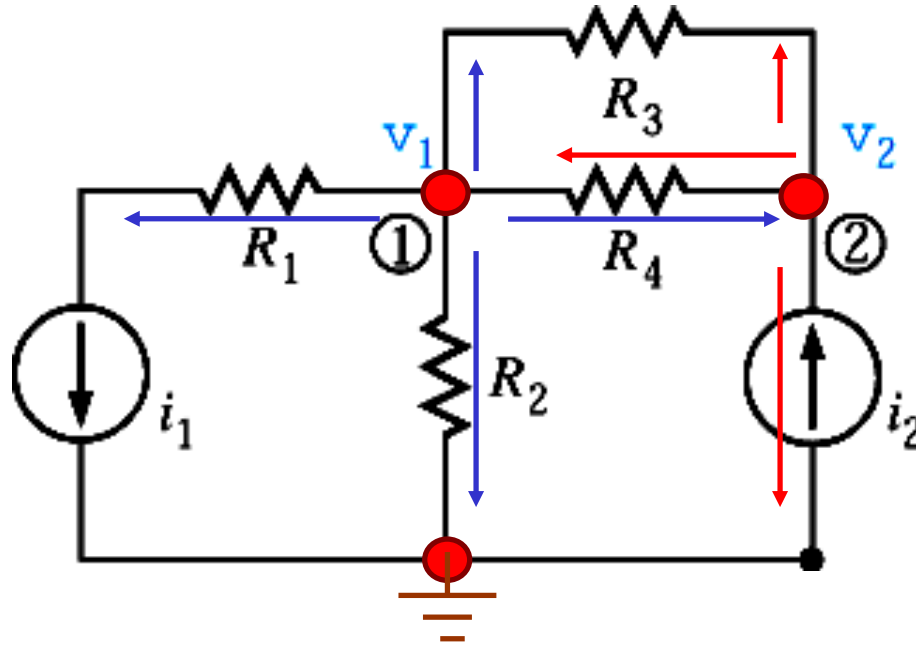
@ v_3

$$\begin{aligned} \frac{v_3 - v_1}{R_3} + \frac{v_3 - v_2}{R_5} + i_B &= 0 \\ -v_1 \frac{1}{R_3} - v_2 \frac{1}{R_5} + v_3 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) &= -i_B \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_A \\ 0 \\ -i_B \end{bmatrix}$$

SADECE BAĞIMSIZ KAYNAKLI DEVRELER

KAK
DENKLEMLERİNİ
YAZIN

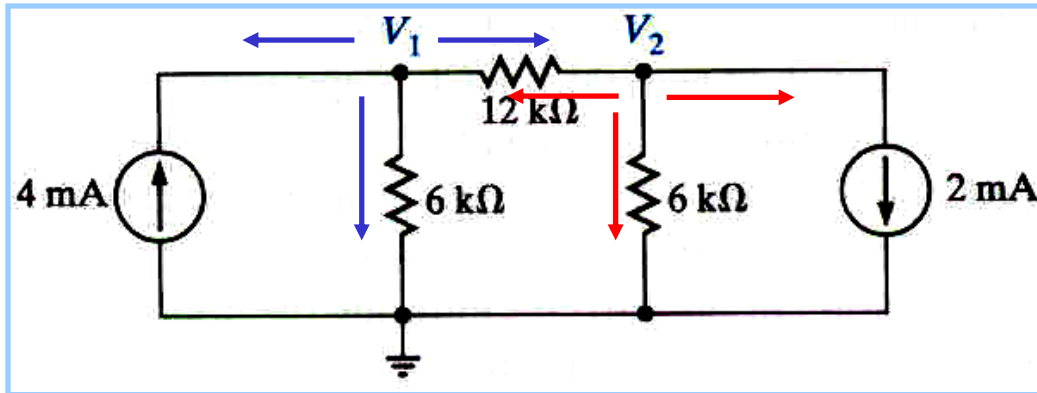


DUGUM 1'DE AKIMLARIN AYRILDIGI VARSAYILARAK KAK DENKLEMLERİNİ YAZIN

$$i_1 + \frac{v_1}{R_2} + \frac{v_1 - v_2}{R_3} + \frac{v_1 - v_2}{R_4} = 0$$

DUGUM 2 ICIN AYNI ISLEMLERİ YAPIN

$$-i_2 + \frac{v_2 - v_1}{R_4} + \frac{v_2 - v_1}{R_3} = 0$$



$$\text{Düğüm } V_1 : -4\text{mA} + \frac{V_1}{6k} + \frac{V_1 - V_2}{12k} = 0$$

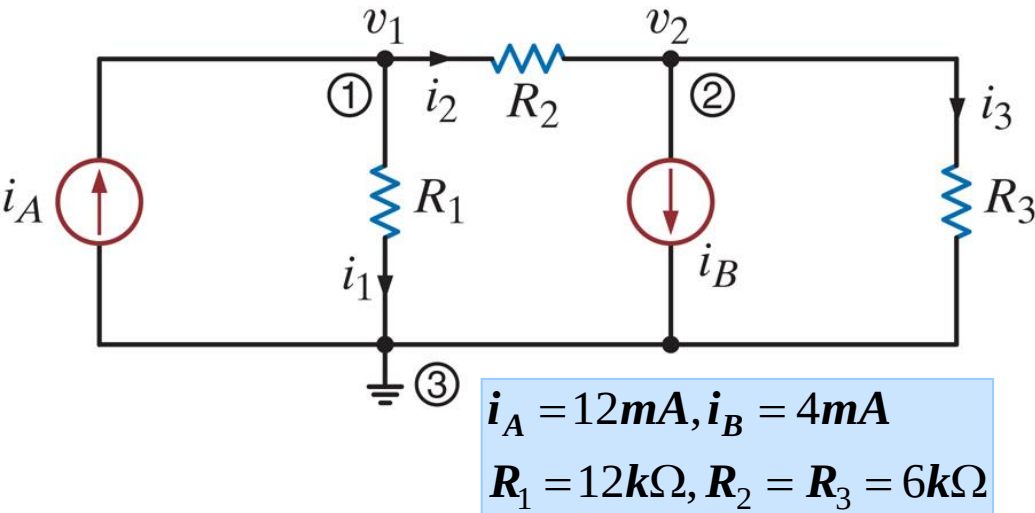
$$\text{Düğüm } V_2 : 2\text{mA} + \frac{V_2}{6k} + \frac{V_2 - V_1}{12k} = 0$$

$$\left(\frac{1}{6k} + \frac{1}{12k} \right) V_1 - \frac{1}{12k} V_2 = 4\text{mA}$$

$$-\frac{1}{12k} + \left(\frac{1}{6k} + \frac{1}{12k} \right) V_2 = -2\text{mA}$$

ALİŞTIRMA

BİR MODEL, DENKLEMLERİN MANİPÜLASYONU İLE
VE MATRİS ANALİZİ KULLANILARAK ÇÖZÜLÜR



DÜĞÜM DENKLEMLERİ

$$-i_A + G_1(v_1 - 0) + G_2(v_1 - v_2) = 0$$

$$-G_2(v_1 - v_2) + i_B + G_3(v_2 - 0) = 0$$

MODEL

$$\begin{aligned}(G_1 + G_2)v_1 - G_2v_2 &= i_A \\ -G_2v_1 + (G_2 + G_3)v_2 &= -i_B\end{aligned}$$

DEĞERLERİ YERİNE YAZIN VE
GÖSTERİMİ BÜYÜK HARFLE YAPIN

$$\begin{aligned}V_1 \left[\frac{1}{12k} + \frac{1}{6k} \right] - V_2 \left[\frac{1}{6k} \right] &= 1 \times 10^{-3} \\ -V_1 \left[\frac{1}{6k} \right] + V_2 \left[\frac{1}{6k} + \frac{1}{6k} \right] &= -4 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

SAYISAL MODEL

$$\frac{V_1}{4k} - \frac{V_2}{6k} = 1 \times 10^{-3}$$

$$-\frac{V_1}{6k} + \frac{V_2}{3k} = -4 \times 10^{-3}$$

$$V_1 = V_2 \left(\frac{2}{3} \right) + 4$$

GAUSSIAN ELİMINASYONU
KULLANIN

$$-\frac{1}{6k} \left(\frac{2}{3} V_2 + 4 \right) + \frac{V_2}{3k} = -4 \times 10^{-3}$$

$$V_2 = -15 \text{ V}$$

$$V_1 = \frac{2}{3} V_2 + 4$$

$$= -6 \text{ V}$$

ALTERNATİF MANİPÜLASYON

$$\frac{V_1}{4k} - \frac{V_2}{6k} = 1 \times 10^{-3} \quad */12k$$

$$-\frac{V_1}{6k} + \frac{V_2}{3k} = -4 \times 10^{-3} \quad */6k$$

$$3V_1 - 2V_2 = 12$$

$$-V_1 + 2V_2 = -24 \quad */3 \text{ (ve denklemleri toplayın)}$$

DENK. TOPLA

$$2V_1 = -12[V]$$

$$4V_2 = -60[V]$$

$$V_1 = -6[V]$$

$$V_2 = -15[V]_{10}$$

MATRİS CEBRİ KULLANILARAK ÇÖZÜM

$$\frac{V_1}{4k} - \frac{V_2}{6k} = 1 \times 10^{-3}$$

$$-\frac{V_1}{6k} + \frac{V_2}{3k} = -4 \times 10^{-3}$$

MATRİS FORMUNDA YAZIN

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4k} & \frac{-1}{6k} \\ \frac{-1}{6k} & \frac{1}{3k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} \\ -4 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

ÇÖZÜMÜ GÖSTERMEK İÇİN MATRİS ANALİZİ KULLANIN

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4k} & \frac{-1}{6k} \\ \frac{-1}{6k} & \frac{1}{3k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} \\ -4 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

MATRİS MANİPÜLASYONUNU GERÇEKLEŞTİRİN

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}$$

ADJOİNT İÇİN HERBİR ELEMANI
ONUN KOFAKTÖRÜ İLE YERDEĞİŞTİRİN

MATRİS CEBRİ KULLANILARAK ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{4k} - \frac{V_2}{6k} &= 1 \times 10^{-3} \\ -\frac{V_1}{6k} + \frac{V_2}{3k} &= -4 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\text{Adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3k} & \frac{1}{6k} \\ \frac{1}{6k} & \frac{1}{4k} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}| &= \left(\frac{1}{3k}\right)\left(\frac{1}{4k}\right) - \left(\frac{-1}{6k}\right)\left(\frac{-1}{6k}\right) \\ &= \frac{1}{18k^2}\end{aligned}$$

VE MATRİS CEBİRİNİ GERÇEKLEŞTİRİN...

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} &= 18k^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3k} & \frac{1}{6k} \\ \frac{1}{6k} & \frac{1}{4k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} \\ -4 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \\ &= 18k^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3k^2} - \frac{4}{6k^2} \\ \frac{1}{6k^2} - \frac{1}{k^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 \\ -15 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

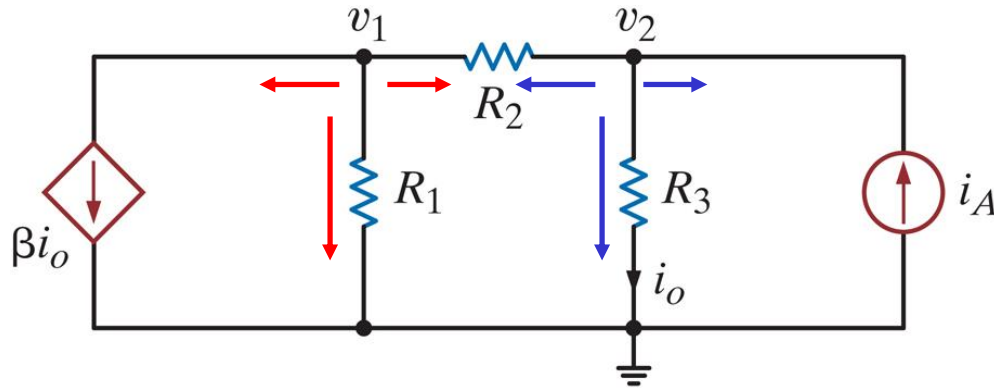
ÖRNEK

$$V_1 = 18k^2 \left(\frac{1 \times 10^{-3}}{3k} + \frac{-4 \times 10^{-3}}{6k} \right)$$

BAĞIMLI KAYNAKLI DEVRELER

MODELLEME PROSEDÜRÜ

- BAĞIMLI KAYNAKLARI KULLANARAK DÜĞÜM DENKLEMLERİ BAĞIMSIZ KAYNAKLAR GİBİ YAZILIR.
- BAĞIMLI HER KAYNAK İÇİN KONTROL DEĞİŞKENİNİ DÜĞÜM GERİLİMLERİ CİNSİNDEN İFADE EDEN BİR DENKLEM EKLENİR.



SAYISAL ÖRNEK

$$\beta = 2 \quad R_2 = 6 \text{ k}\Omega \quad i_A = 2 \text{ mA}$$

$$R_1 = 12 \text{ k}\Omega \quad R_3 = 3 \text{ k}\Omega$$

$$\left(\frac{1}{12k} + \frac{1}{6k} \right) v_1 + \left(\frac{2}{3k} - \frac{1}{6k} \right) v_2 = 0$$

$$-\frac{1}{6k} v_1 + \left(\frac{1}{12k} + \frac{1}{3k} \right) v_2 = 2 \text{ mA}$$

$$\frac{1}{4k} V_1 + \frac{1}{2k} V_2 = 0$$

*/4k

$$-\frac{1}{6k} V_1 + \frac{1}{2k} V_2 = 2 \times 10^{-3}$$

*/6k

$$V_1 + 2V_2 = 0$$

$$-V_1 + 3V_2 = 12[\text{V}]$$

$$5V_2 = 12[\text{V}]$$

$$V_1 = -\frac{24}{5} \text{ V}$$

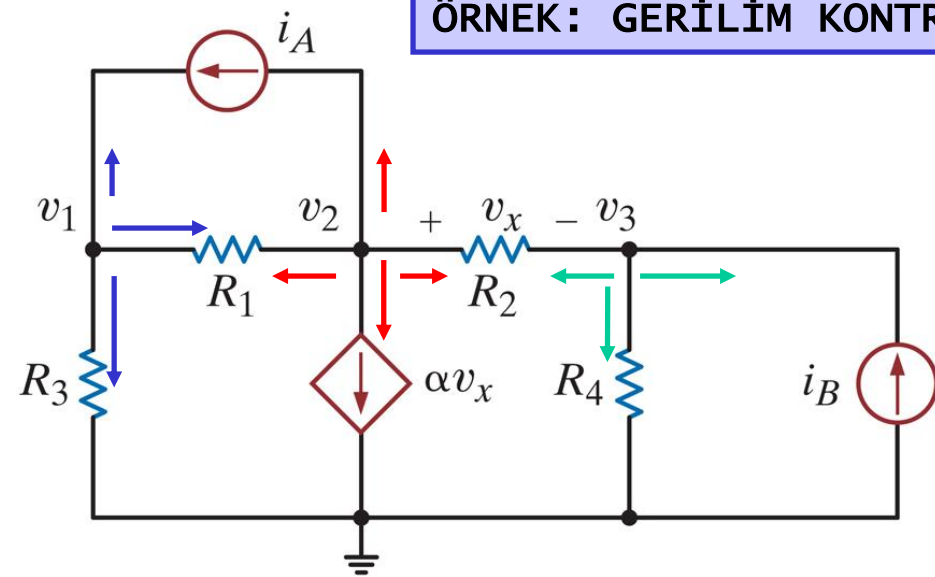
YENİDEN DÜZENLEME YAPILDIĞINDA

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_1 + \left(\frac{\beta}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right) v_2 = 0$$

$$-\frac{1}{R_2} v_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) v_2 = i_A$$

EE-201, Ö.F.BAY

ÖRNEK: GERİLİM KONTROLLÜ AKIM KAYNAGI



YERİNE YAZIP YENİDEN DÜZENLEYİN

$$\begin{aligned}(G_1 + G_3)v_1 - G_1v_2 &= i_A \\ -G_1v_1 + (G_1 + \alpha + G_2)v_2 - (\alpha + G_2)v_3 &= -i_A \\ -G_2v_2 + (G_2 + G_4)v_3 &= i_B\end{aligned}$$

GAUSSIAN ELİMİNASYON KULLANABİLİRSİNİZ...

DÜĞÜM DENKLEMLERİNİ YAZIN. BAĞIMLI KAYNAKLAR NORMAL KAYNAK GİBİ DÜŞÜNÜN

$$G_3v_1 + G_1(v_1 - v_2) - i_A = 0$$

$$i_A + G_1(v_2 - v_1) + \alpha v_x + G_2(v_2 - v_3) = 0$$

$$G_2(v_3 - v_2) + G_4v_3 - i_B = 0$$

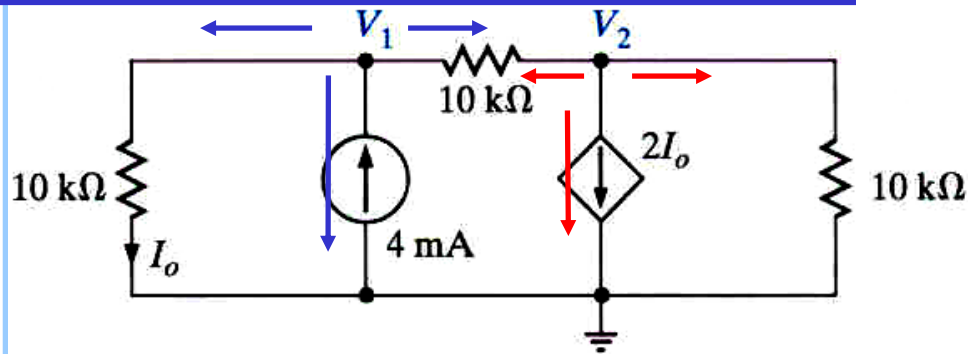
KONTROL DEĞİŞKENİNİ DÜĞÜM GERİLİMLERİ CİNSİNDEN İFADE EDİN

$$v_x = v_2 - v_3$$

VEYA MATRİS CEBİRİ KULLANABİLİRSİNİZ

$$\begin{bmatrix} (G_1 + G_3) & -G_1 & 0 \\ -G_1 & (G_1 + \alpha + G_2) & -(\alpha + G_2) \\ 0 & -G_2 & (G_2 + G_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_A \\ -i_A \\ i_B \end{bmatrix}$$

ÖRNEK: DÜĞÜM GERİLİMLERİNİ BULUN



DÜĞÜM GERİLİMLERİ

$$\text{Düğüm } V_1: \frac{V_1}{10k} - 4mA + \frac{V_1 - V_2}{10k} = 0$$

$$\text{Düğüm } V_2: \frac{V_2 - V_1}{10k} + 2I_o + \frac{V_2}{10k} = 0$$

KONTROL DEĞİŞKENİ (DÜĞÜM GERİLİMLERİ CİNSİNDEN)

$$I_o = \frac{V_1}{10k}$$

YERİNE YAZILDIĞINDA;

$$\frac{V_1}{10k} - 4mA + \frac{V_1 - V_2}{10k} = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{10k} + 2 \frac{V_1}{10k} + \frac{V_2}{10k} = 0$$

YENİDEN DÜZENLENDİĞİNDE

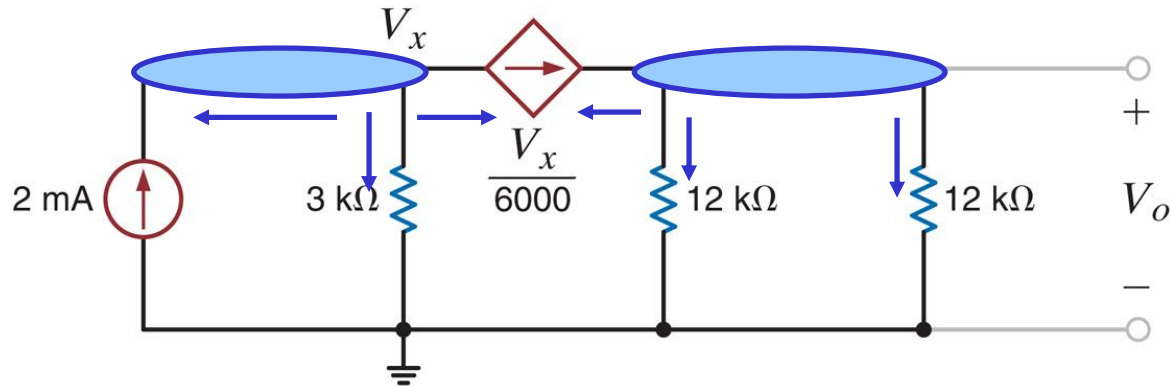
$$2V_1 - V_2 = 40[V] \quad */2$$

$$V_1 + 2V_2 = 0$$

$$5V_1 = 80V \Rightarrow V_1 = 16V$$

$$V_2 = -\frac{V_1}{2} \Rightarrow V_2 = -8V$$

ÖRNEK: V_o GERİLİMİNİ BULUN



DÜĞÜM DENKLEMLERİ

BAĞIMLI KAYNAĞIN DÜĞÜM GERİLİMİ CİNSİNDEN YER DEĞİŞTİRİLDİĞİNE DİKKAT EDİN

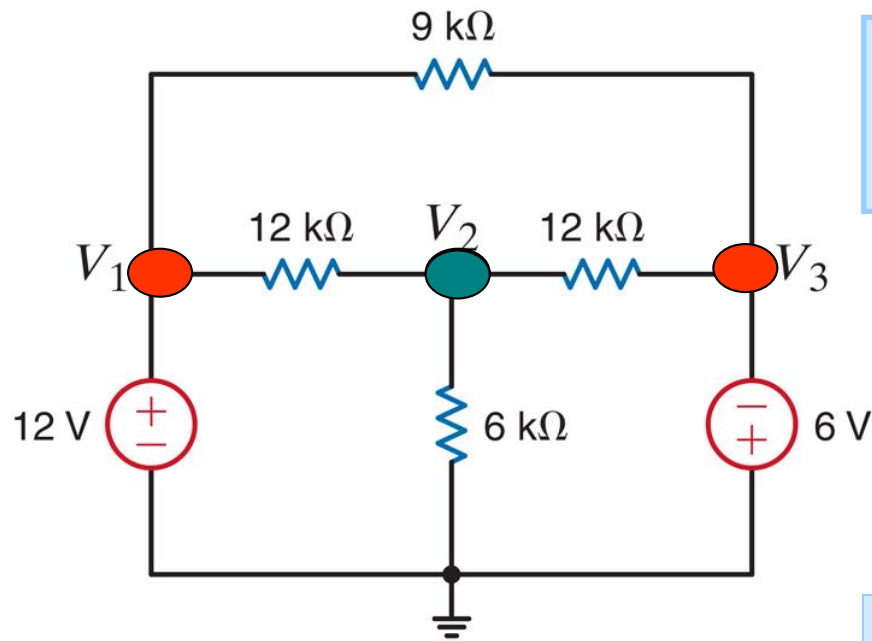
$$-2mA + \frac{V_x}{3k} + \frac{V_x}{6k} = 0 \quad */6k$$

$$-\frac{V_x}{6k} + \frac{V_o}{12k} + \frac{V_o}{12k} = 0 \quad */12k$$

$$3V_x = 12[V] \Rightarrow V_x = 4[V]$$

$$2V_o - 2V_x = 0 \Rightarrow V_o = 4[V]$$

BAĞIMSIZ GERİLİM KAYNAKLI DEVRELER



İpucu:
Referans düğüme bağlanan
herbir gerilim kaynağı bir
denklemden tasarruf sağlar

3 düğüm artı bir referans düğüm
Prensip olarak üç denkleme ihtiyaç
vardır...

...fakat iki düğüm, gerilim kaynakları
vasıtasıyla referansa bağlanmışlardır.
Dolayısıyla bu düğüm gerilimleri
bilinmektedir.!!!

...sadece tek denklem yeterlidir

$$\frac{V_2}{6k} + \frac{V_2 - V_3}{12k} + \frac{V_2 - V_1}{12k} = 0$$

$$V_1 = 12[V]$$

$$V_3 = -6[V]$$

BUNLAR DİĞER DÜĞÜMLERİN
DENKLEMLERİDİR

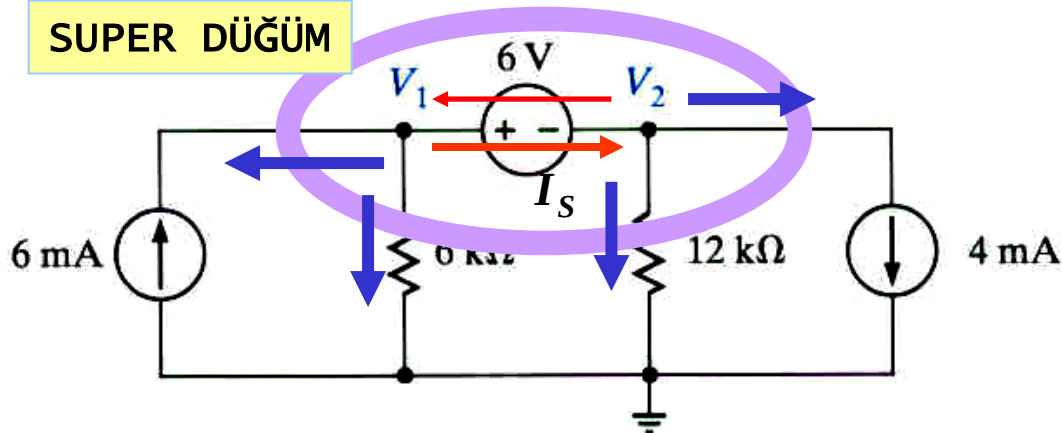
DENKLEMLER COZULDUGUN DE;

$$2V_2 + (V_2 - V_3) + (V_2 - V_1) = 0$$

$$4V_2 = 6[V] \Rightarrow V_2 = 1.5[V]$$

SÜPER DÜĞÜM TEKNIĞİ

SUPER DÜĞÜM



Geleneksel düğüm analizi her düğümdeki akımları gerektirir

Düğüm V1: $-6mA + \frac{V_1}{6k} + I_S = 0$

Düğüm V2: $-I_S + 4mA + \frac{V_2}{12k} = 0$

$$V_1 - V_2 = 6[V]$$

SÜPER DÜĞÜME KAK UYGULANIR

$$-6mA + \frac{V_1}{6k} + \frac{V_2}{12k} + 4mA = 0$$

Bir denklem daha ihtiyaç vardır

$$V_1 - V_2 = 6[V]$$

$$(1) \quad \frac{V_1}{6k} + \frac{V_2}{12k} - 6mA + 4mA = 0$$

$$(2) \quad V_1 - V_2 = 6[V]$$

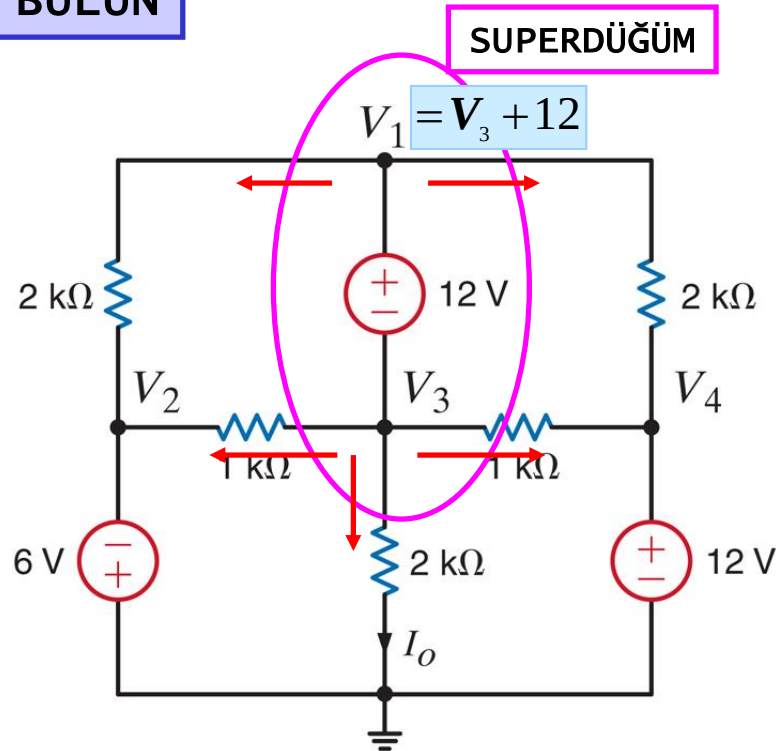
$$2V_1 + V_2 = 24[V]$$

$$V_1 - V_2 = 6[V]$$

$$3V_1 = 30[V] \Rightarrow V_1 = 10[V]$$

$$V_2 = V_1 - 6[V] = 4[V]$$

ÖRNEK: I_o AKIMINI BULUN



$$V_2 = -6V, V_4 = 12V$$

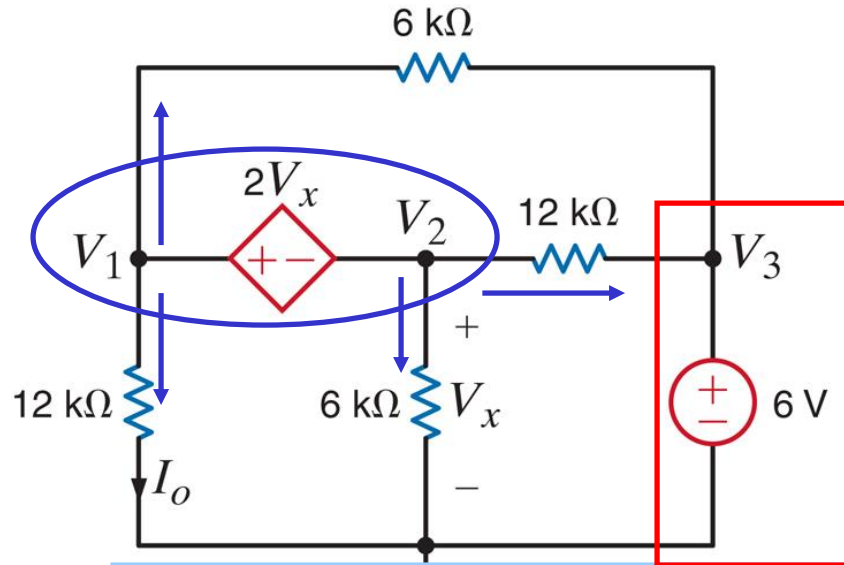
BİLİNER DÜĞÜM GERİLİMLERİ

$$\text{SUPER DUGUMDEN} \Rightarrow V_1 - V_3 = 12$$

$$\frac{V_3 + 12 - (-6)}{2k} + \frac{V_3 + 12 - 12}{2k} + \frac{V_3 - (-6)}{1k} + \frac{V_3 - 12}{1k} + \frac{V_3}{2k} = 0$$

$$V_3 = -\frac{6}{7}V \quad \Rightarrow \quad I_o = \frac{-\frac{6}{7}}{2k} = -\frac{3}{7} \text{ mA}$$

BAĞIMLI KAYNAKLI SUPER DÜĞÜM ÖRNEĞİ
 I_0 degerini bulun



REFERANSA BAĞLI GERİLİM KAYNAĞI

$$V_3 = 6V$$

SUPER DÜĞÜMDEN $V_1 - V_2 = 2V_x$

KONTROL DEĞİŞKENİ $V_x = V_2 \Rightarrow V_1 = 3V_2$

SÜPER DÜĞÜME KAK UYG.

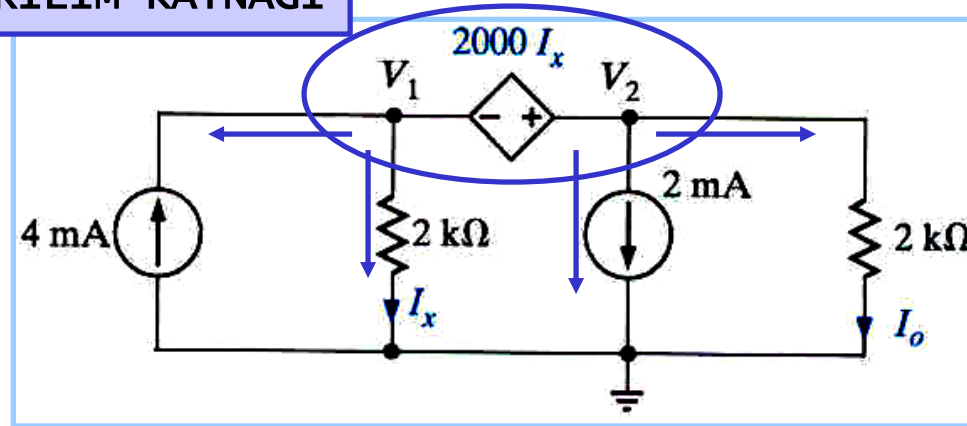
$$\frac{V_1 - V_3}{6k} + \frac{V_1}{12k} + \frac{V_2}{6k} + \frac{V_2 - V_3}{12k} = 0$$

$$2(V_1 - 6) + V_1 + 2V_2 + V_2 - 6 = 0$$

$$3V_1 + 3V_2 = 18 \Rightarrow 4V_1 = 18$$

$$I_o = \frac{V_1}{12k} = \frac{3}{8} \text{ mA}$$

AKIM KONTROLLÜ GERİLİM KAYNAĞI



$$V_2 - V_1 = 2kI_x$$

KONTROL DEĞİŞKENİ

$$I_x = \frac{V_1}{2k}$$

$$\Rightarrow V_1 = 2kI_x \Rightarrow V_2 = 2V_1$$

$$-4mA + \frac{V_1}{2k} + 2mA + \frac{V_2}{2k} = 0$$

$$V_1 + V_2 = 4[V]$$

$$-2V_1 + V_2 = 0$$

$$3V_2 = 8[V]$$

$$I_o = \frac{V_2}{2k} = \frac{4}{3}mA$$