

# LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN DEVRE ANALİZİNE UYGULANMASI

## ÖĞRENME HEDEFLERİ

Laplace ile devre çözümleri  
Laplace dönüşümünün kullanılabilirliğini gösterme

Devre Elemanı Modelleri  
Devrelerin Laplace düzlemine dönüştürülmesi

Analiz Teknikleri  
Tüm standart analiz teknikleri, KGK, KAK, düğüm,  
çevre analizi, Thevenin teoremi uygulanması

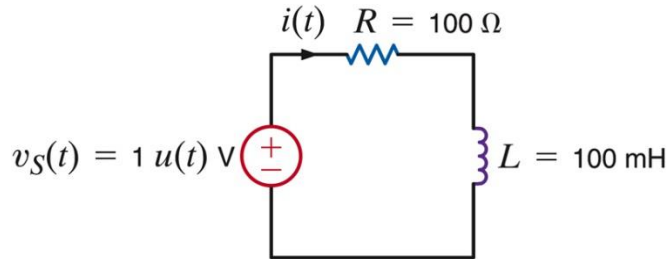
Transfer Fonksiyonu  
Konunun gözden geçirilmesi ve anlamlandırılması

Kutup-Sıfır Eğrileri / Bode Eğrileri  
Aralarındaki bağlantının kurulması

Kalıcı Durum Analizi  
AA analizinin gözden geçirilmesi

# LAPLACE İLE DEVRE ÇÖZÜMLERİ

Diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan konvansiyonel bir yaklaşımı, Laplace dönüşümü kullanan bir teknikle karşılaştıralım



Tamamlayıcı i denklem

$$Ri_C(t) + L \frac{di_C}{dt}(t) = 0 \Rightarrow i_C(t) = K_C e^{-\alpha t}$$

$$\text{KGK : } v_S(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}(t)$$

$$RK_C e^{-\alpha t} + LK_C (-\alpha e^{-\alpha t}) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{R}{L}$$

Tamamlayıcı

$$i = i_C + i_p$$

Özel çözüm

Bu durum için özel çözüm

$$i_p(t) = K_p \Rightarrow v_S = 1 = RK_p$$

$$i(t) = \frac{1}{R} + K_C e^{-\frac{R}{L}t}$$

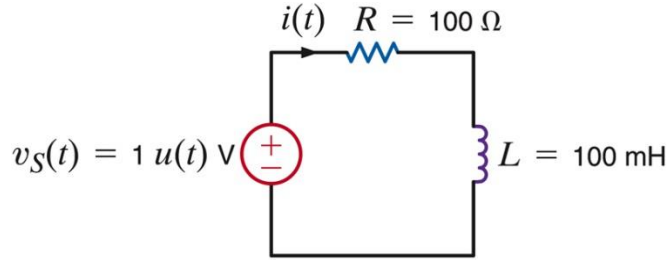
Sinir şartlarını kullanalım

$$v_S(t) = 0, t < 0 \text{ için } \Rightarrow i(0) = 0$$

$$i(t) = \frac{1}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right); t > 0$$

# LAPLACE İLE DEVRE ÇÖZÜMLERİ

Diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan konvansiyonel bir yaklaşımı, Laplace dönüşümü kullanan bir teknikle karşılaştıralım (devamı)



Denklemin “ Laplace dönüşümünü” alın

$$v_S(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}(t)$$

$$V_S(s) = RI(s) + L\mathcal{L}\left[\frac{di}{dt}\right]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{di}{dt}\right] = sI(s) - i(0) = sI(s)$$

$$\therefore \frac{1}{s} = RI(s) + LsI(s)$$

$$I(s) = \frac{1}{s(R + Ls)}$$

$$I(s) = \frac{1/L}{s(R/L + s)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + R/L}$$

$$K_1 = sI(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{R}$$

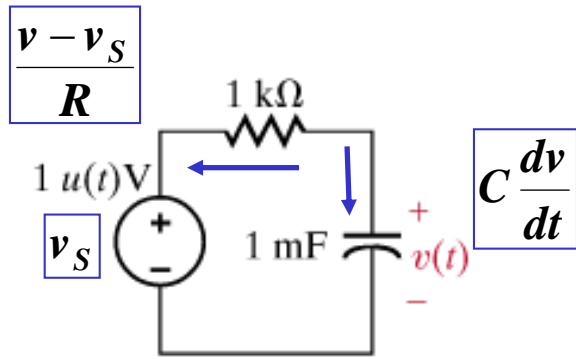
$$K_2 = (s + R/L)I(s) \Big|_{s=-R/L} = -\frac{1}{R}$$

$$i(t) = \frac{1}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right); t > 0$$

Sadece cebirsel işlem gereklidir.

Başlangıç şartları otomatik olarak dahil edilmektedir.

Özel veya tamamlayıcı çözüm aramaya ihtiyaç bulunmamaktadır.



$$\mathcal{L}\left[\frac{dv}{dt}\right] = sV(s) - v(0) = sV(s)$$

$$v_S(t) = 0, t < 0 \Rightarrow v(0) = 0$$

$$v_S = u(t) \Rightarrow V_S(s) = \frac{1}{s}$$

Örtük biçimde verilen başlangıç durumu

### KAK kullanılan model

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v - v_S}{R} = 0$$

$$RC \frac{dv}{dt} + v = v_S$$

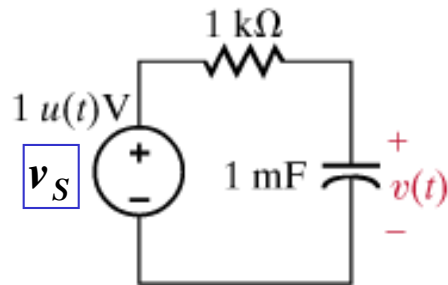
$$RC \mathcal{L}\left[\frac{dv}{dt}\right] + V(s) = V_S(s)$$

$\mathcal{L}$

Diferansiyel denklem Laplace düzleminde, şimdi cebirsel bir denklemdir.

$$RCsV(s) + V(s) = \frac{1}{s}$$

$$V(s) = \frac{1}{s(RCs + 1)} = \frac{1/RC}{s(s + 1/RC)}$$



$$RC \frac{dv}{dt} + v = v_S$$

Diferansiyel denklem  
Laplace düzleminde  
şimdi cebirsel bir  
denklemdir.

$$RCsV(s) + V(s) = \frac{1}{s}$$

$$V(s) = \frac{1}{s(RCs + 1)} = \frac{1/RC}{s(s + 1/RC)}$$

Ters Laplace dönüşümü için  
Kısmi kesirlere ayırmayı kullanalım

$$V(s) = \frac{1/RC}{s(s + 1/RC)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 1/RC}$$

$$K_1 = sV(s) \big|_{s=0} = 1$$

$$K_2 = (s + 1/RC)V(s) \big|_{s=-1/RC} = -1$$

$$v(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}, t \geq 0$$

# DEVRE ELEMANI MODELLERİ

## Bağımsız Kaynaklar

$$v_S(t) \rightarrow V_S(s)$$

$$i_S(t) \rightarrow I_S(s)$$

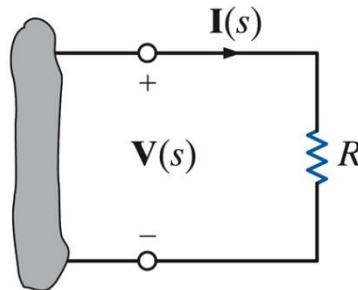
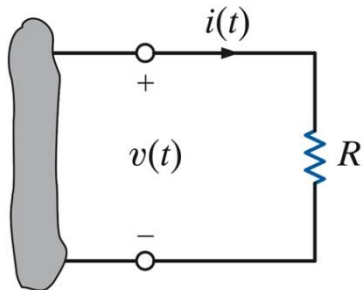
## Bağımlı Kaynaklar

$$v_D(t) = A i_C(t) \rightarrow V_D(s) = A I_C(s)$$

$$i_D(t) = B v_C(t) \rightarrow I_D(s) = B V_C(s)$$

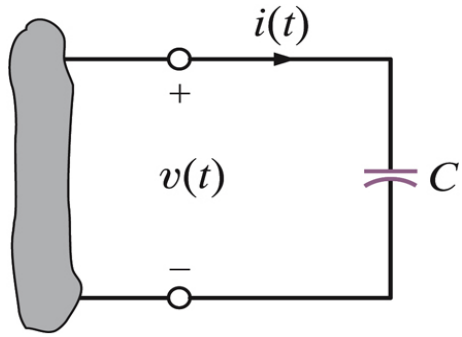
...

## Direnç Elemanı



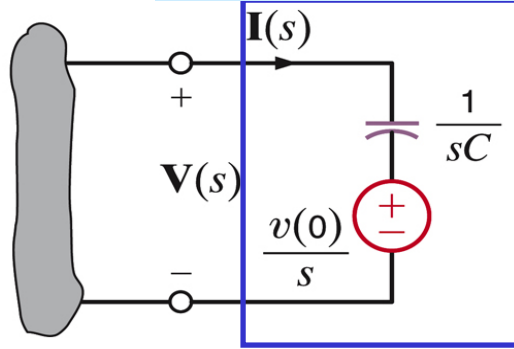
$$v(t) = R i(t) \Rightarrow V(s) = R I(s)$$

## Kapasitör: Model 1



$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(x) dx + v(0)$$

## Kaynak dönüşümü



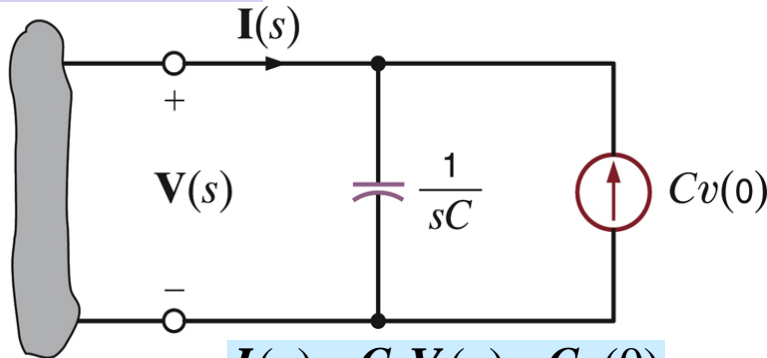
$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s) + \frac{v(0)}{s}$$

Gerilim kaynağına seri bağlı empedans

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t i(x) dx \right] = \frac{I(s)}{s}$$

$$I_{es} = \frac{\frac{v(0)}{s}}{\frac{1}{Cs}} = Cv(0)$$

## Kapasitör: Model 2

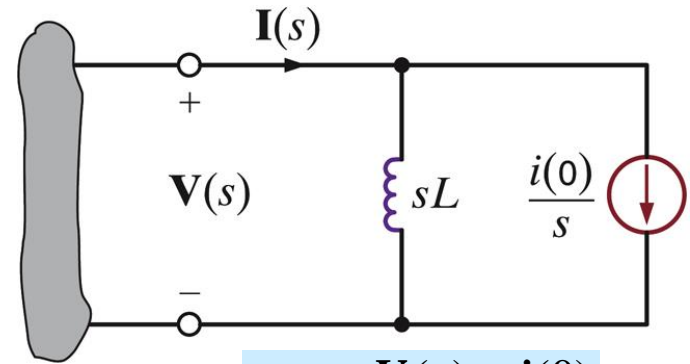
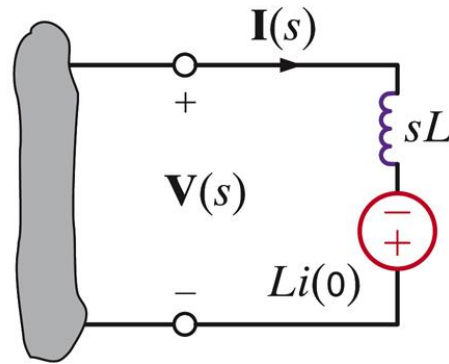
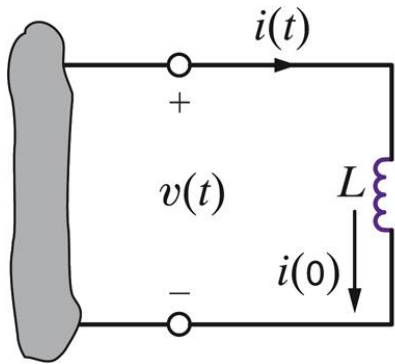


$$I(s) = CsV(s) - Cv(0)$$

Akım kaynağına paralel bağlı empedans

# indüktör Modelleri

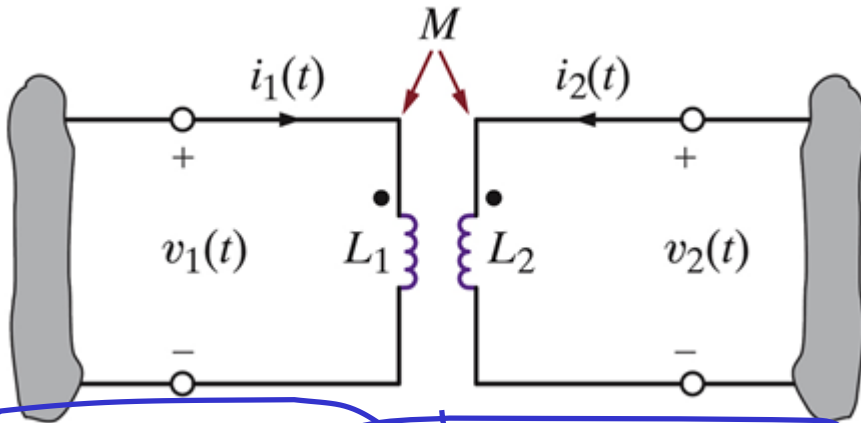
$$\mathcal{L}\left[\frac{di}{dt}\right] = sI(s) - i(0)$$



$$v(t) = L \frac{di}{dt}(t) \Rightarrow V(s) = L(sI(s) - i(0))$$

$$I(s) = \frac{V(s)}{Ls} + \frac{i(0)}{s}$$

# Ortak idüktans



$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

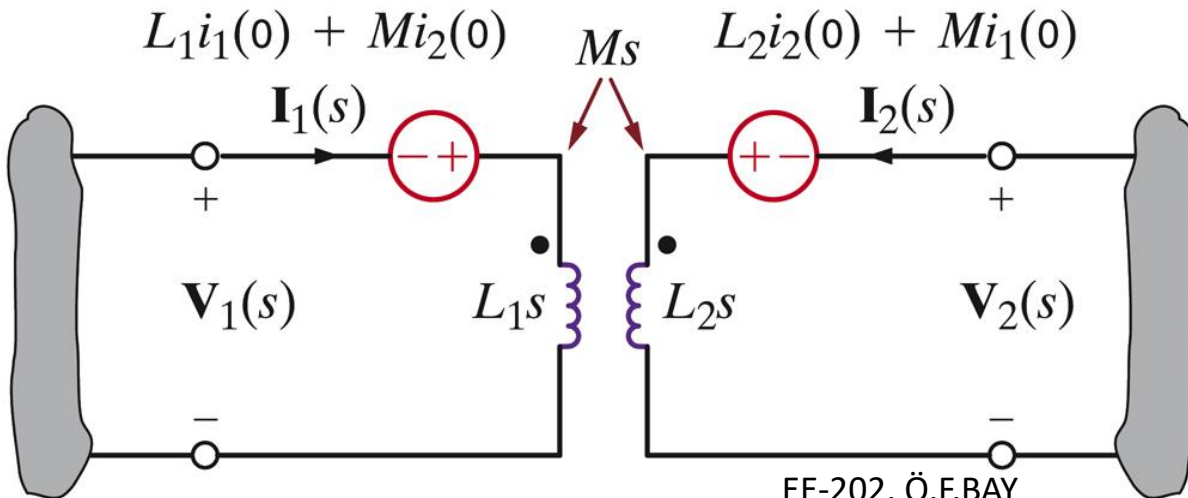
$$v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$V_1(s) = L_1 s I_1(s) - L_1 i_1(0) + M s I_2(s) - M i_2(0)$$

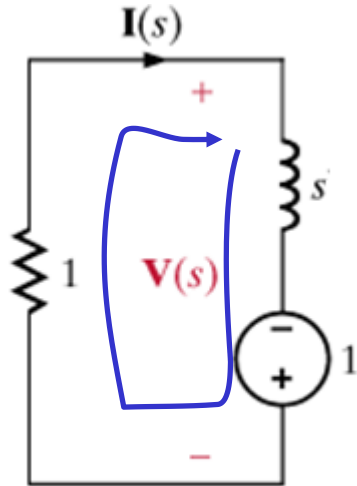
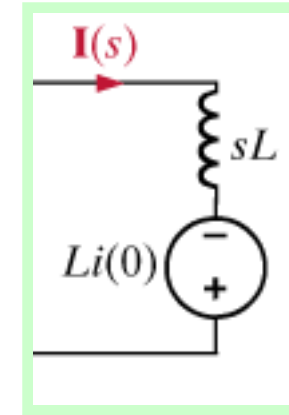
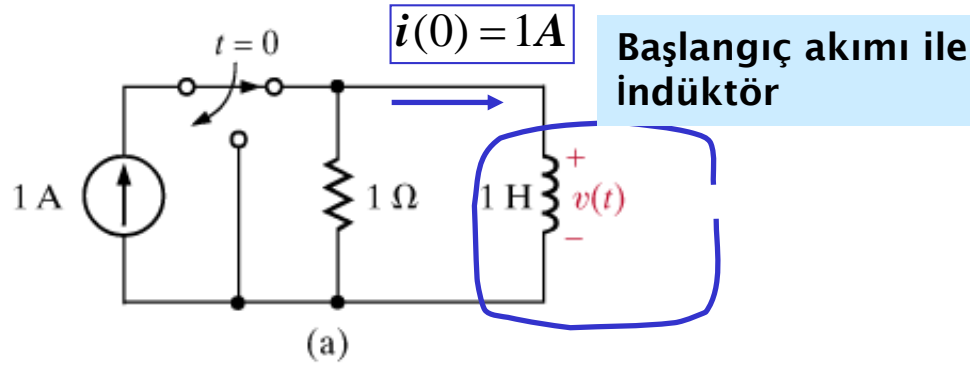
$$V_2(s) = M s I_1(s) - M i_1(0) + L_2 s I_2(s) - L_2 i_2(0)$$

Birincil tarafta tek bir kaynakta birleştirin

ikincil tarafta tek kaynak



$t < 0$  için kalıcı durum



KGK :  $1 = (1 + s)I(s)$

Ohm Kanunu

$$V(s) = -1 \times I(s) \Rightarrow V(s) = -\frac{1}{s+1}$$

S-düzleminde Eşdeğer devre

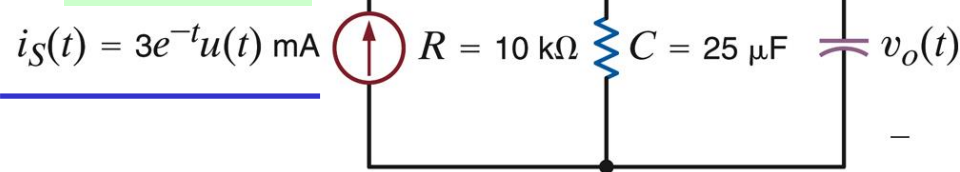
# ANALİZ TEKNİKLERİ

**Tüm analiz teknikleri s-düzleminde uygulanabilir**

## ÖRNEK

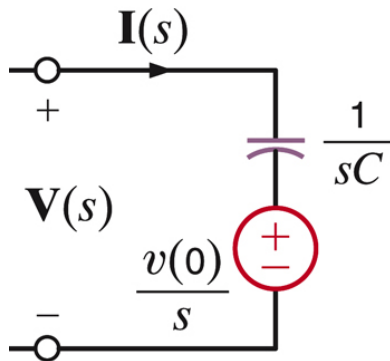
S-düzlemindeki eşdeğer devreyi çizin ve gerilimi hem s-düzleminde hem de zaman düzleminde bulun

$$I_S(s) = \frac{3}{s+1}$$

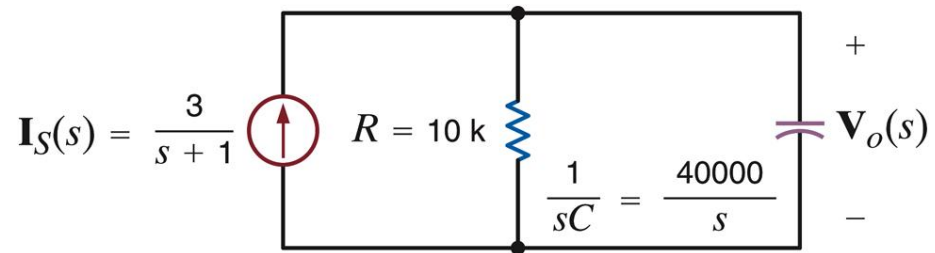


$$i_S(t) = 0, t < 0 \Rightarrow v_o(0) = 0$$

Önce kapasitördeki başlangıç geriliminin belirlenmesi gerekir



$$RC = (10 \times 10^3)(25 \times 10^{-6}) = 0.25$$

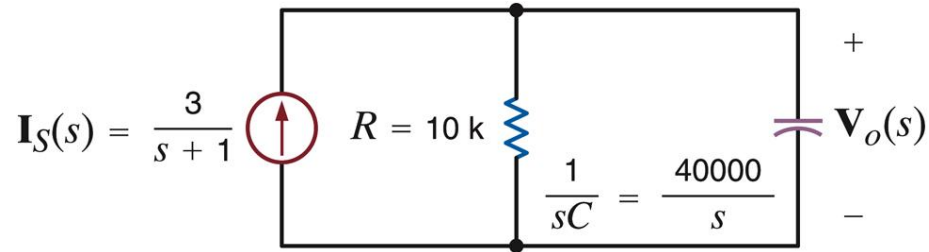


$$V_o(s) = \left( R \parallel \frac{1}{Cs} \right) I_S(s)$$

$$V_o(s) = \frac{\frac{R}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} I_S(s) = \frac{1/C}{s + 1/RC} \times \frac{3 \times 10^{-3}}{s+1}$$

**ÖRNEK - devamı****S-düzlemindeki eşdeğer devreyi çizin ve gerilimi hem s-düzleminde hem de zaman düzleminde bulun**

$$RC = (10 \times 10^3)(25 \times 10^{-6}) = 0.25$$



$$V_o(s) = \frac{1/C}{s + 1/RC} \times \frac{3 \times 10^{-3}}{s + 1}$$

$$V_o(s) = \frac{120}{(s+4)(s+1)} = \frac{K_1}{s+4} + \frac{K_2}{s+1}$$

$$K_1 = (s+4)V_o(s) \Big|_{s=-4} = -40$$

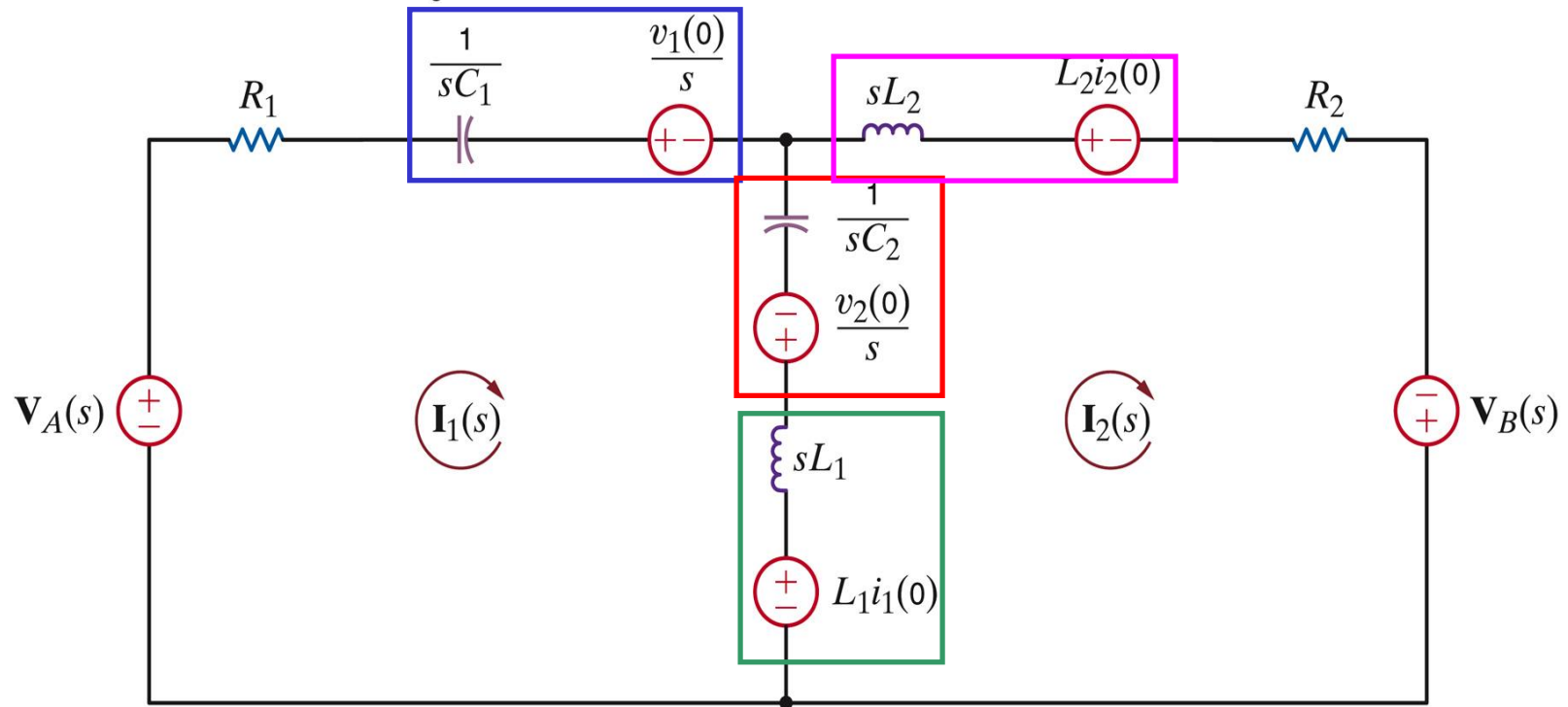
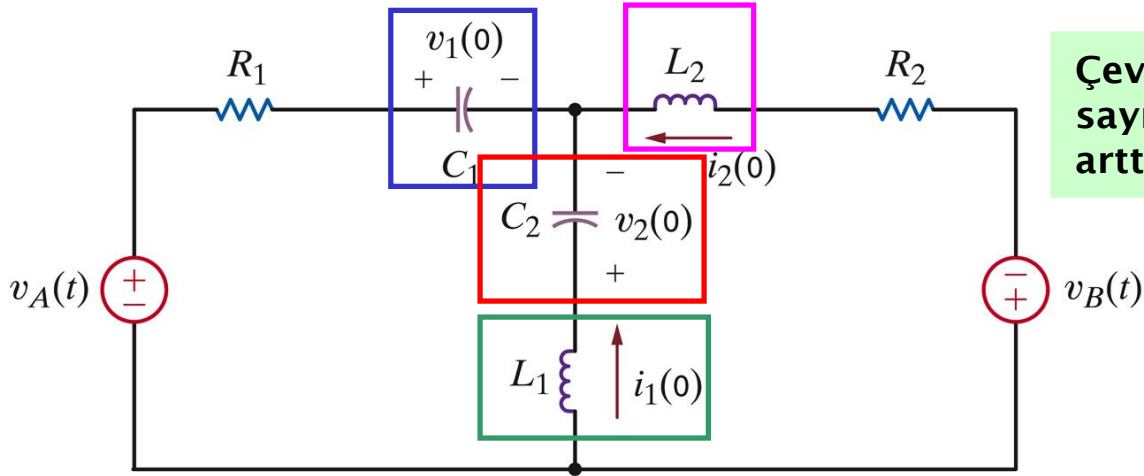
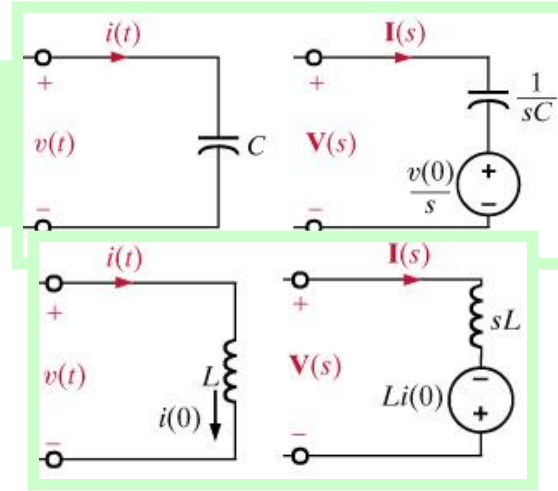
$$K_2 = (s+1)V_o(s) \Big|_{s=-1} = 40$$

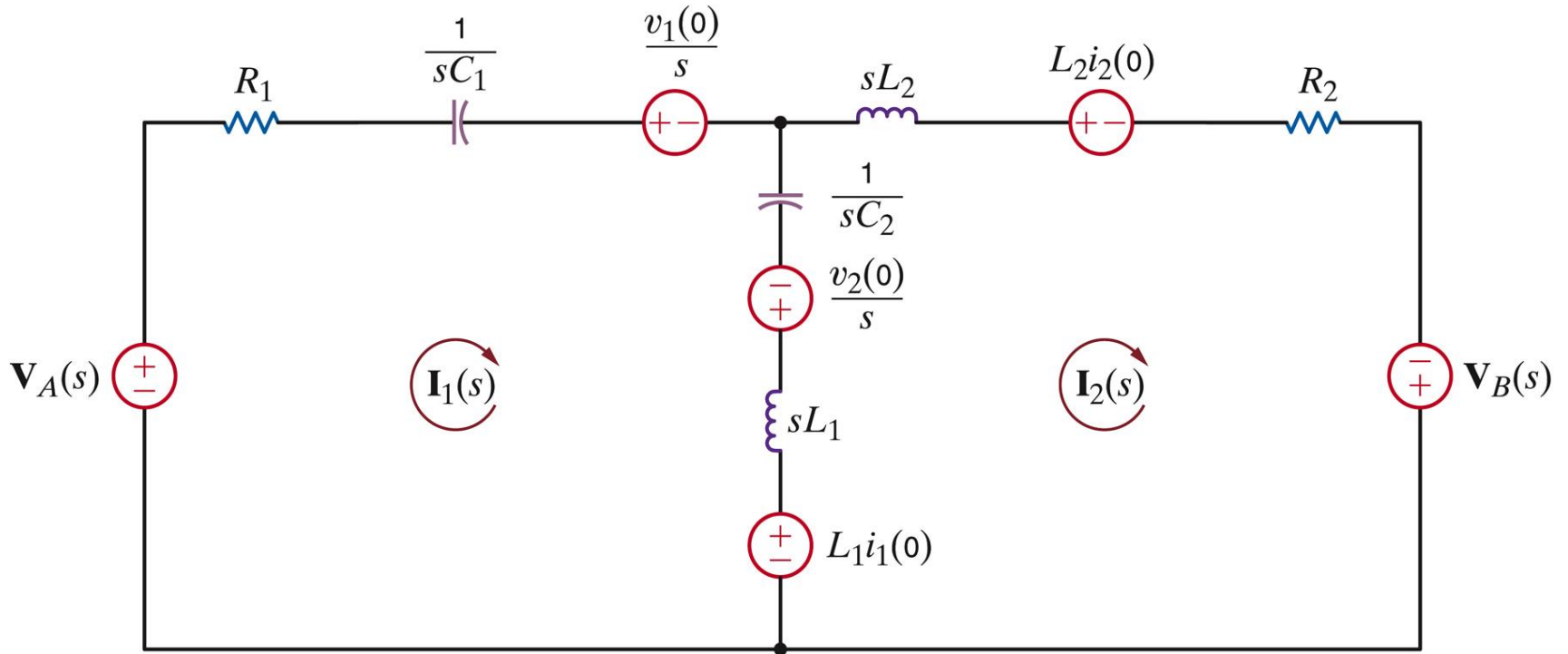
$$v_o(t) = 40 \left[ e^{-t} - e^{-4t} \right] u(t)$$

**ÖRNEK**

**Çevre denklemlerini s-düzleminde yazın**

**Çevre sayısını arttırmayınız**





Cevre 1

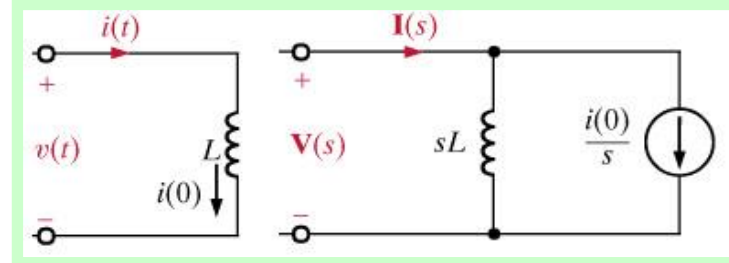
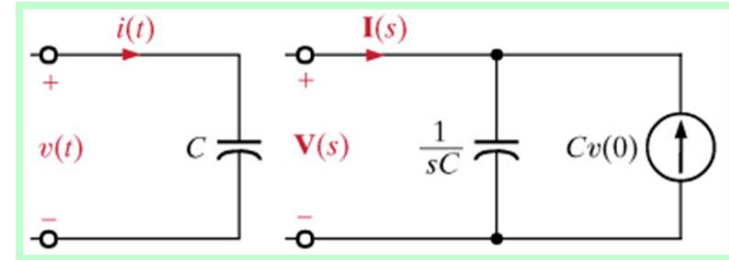
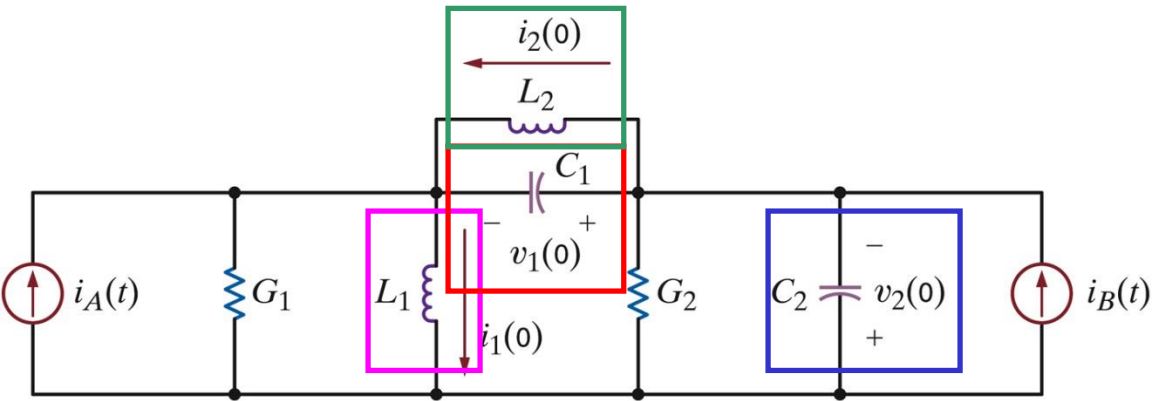
$$V_A(s) - \frac{v_1(0)}{s} + \frac{v_2(0)}{s} - L_1i_1(0) = R_1I_1(s) + \frac{1}{C_1s}I_1(s) + \frac{1}{C_2s}(I_1(s) - I_2(s)) + L_1s(I_1(s) - I_2(s))$$

Cevre 2

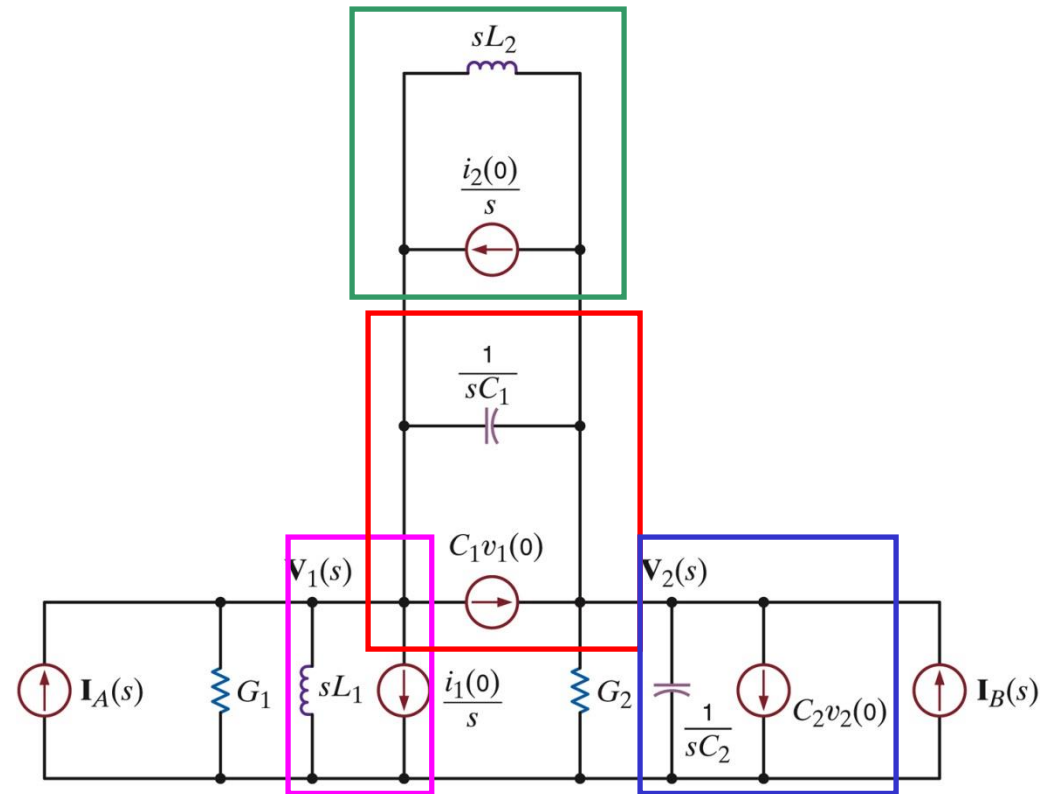
$$L_1i_1(0) - \frac{v_2(0)}{s} - L_2i_2(0) + V_B(s) = L_1s(I_2(s) - I_1(s)) + \frac{1}{C_2s}(I_2(s) - I_1(s)) + (L_2s + R_2)I_2(s)$$

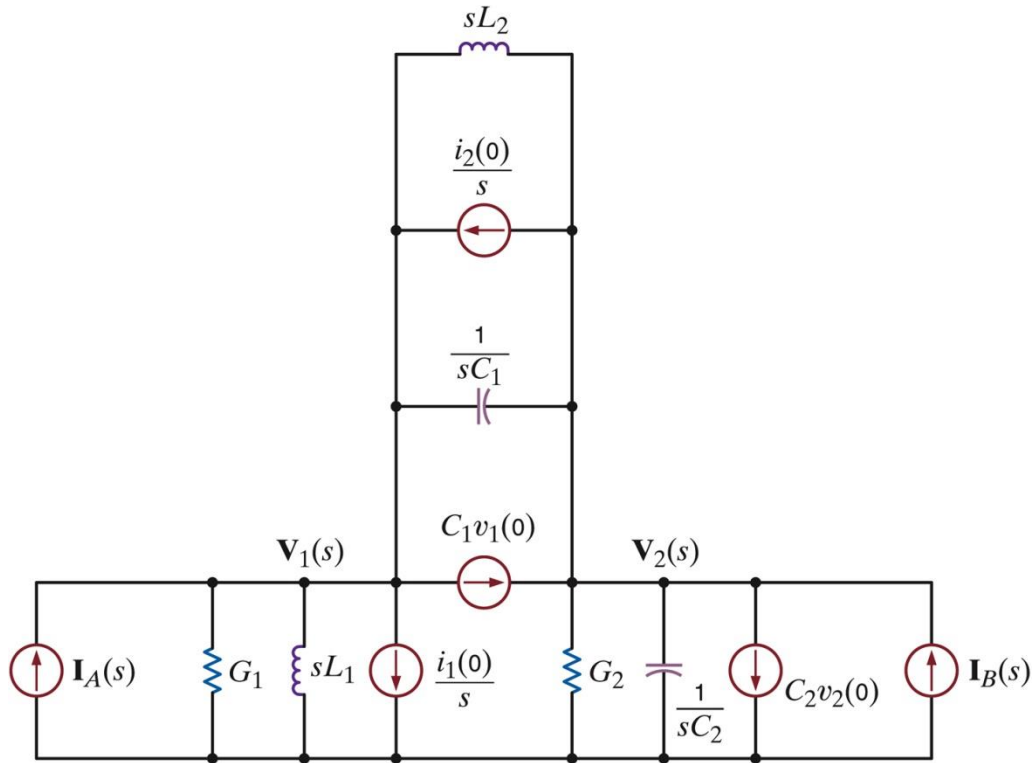
**ÖRNEK**

**Düğüm denklemlerini s-düzleminde yazın**



**Düğüm sayısını arttırmayınız**





Düğüm  $V_1$

$$I_A(s) - \frac{i_1(0)}{s} - C_1 v_1(0) + \frac{i_2(0)}{s} = \left( G_1 + \frac{1}{L_1 s} + \frac{1}{L_2 s} + C_1 s \right) V_1(s) - \left( \frac{1}{L_2 s} + C_1 s \right) V_2(s)$$

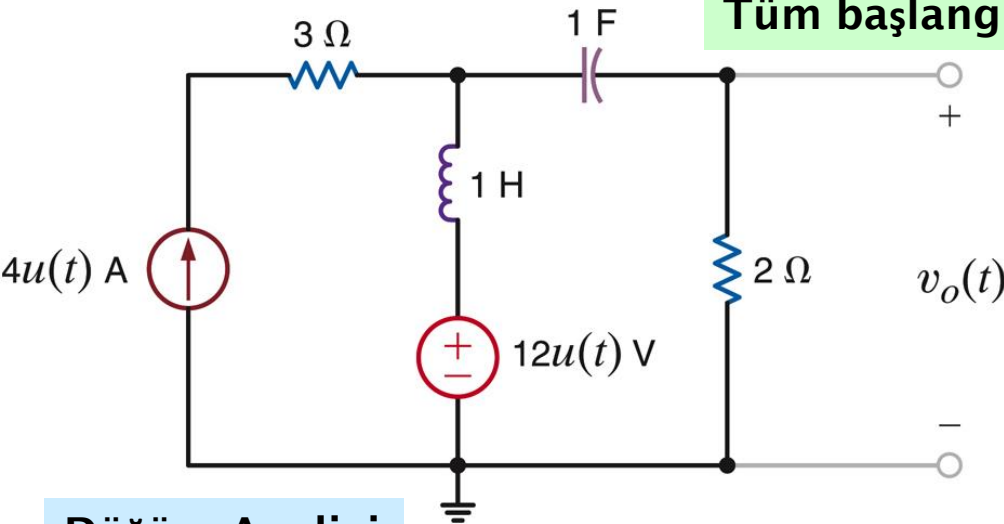
Düğüm  $V_2$

$$I_B(s) - C_2 v_2(0) + C_1 v_1(0) - \frac{i_2(0)}{s} = \left( G_2 + C_2 s + C_1 s + \frac{1}{L_2 s} \right) V_2(s) - \left( C_1 s + \frac{1}{L_2 s} \right) V_1(s)$$

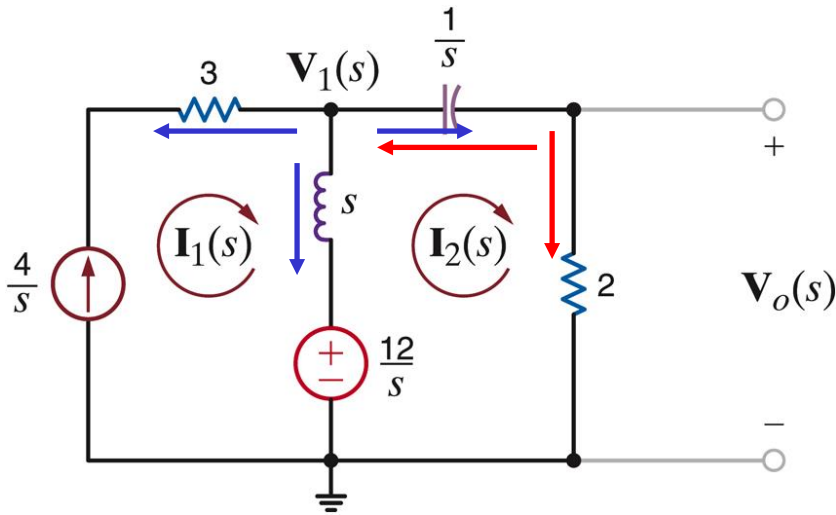
# ÖRNEK

$v_o(t)$  gerilimini düğüm analizi, çevre analizi, süperpozisyon, kaynak dönüşümü, Thevenin ve Norton teoremleri ile bulunuz.

Tüm başlangıç şartlarının sıfır olduğunu varsayalım



## Düğüm Analizi



Düğüm  $V_1$

$$-\frac{4}{s} + \frac{V_1(s) - \frac{12}{s}}{s} + \frac{V_1(s) - V_o(s)}{\frac{1}{s}} = 0 \quad \times s$$

$$\frac{V_1(s) \times 2}{2 + \frac{1}{s}}$$

Düğüm  $V_o$

$$\frac{V_o(s)}{2} + \frac{V_o(s) - V_1(s)}{\frac{1}{s}} = 0 \quad \times 2$$

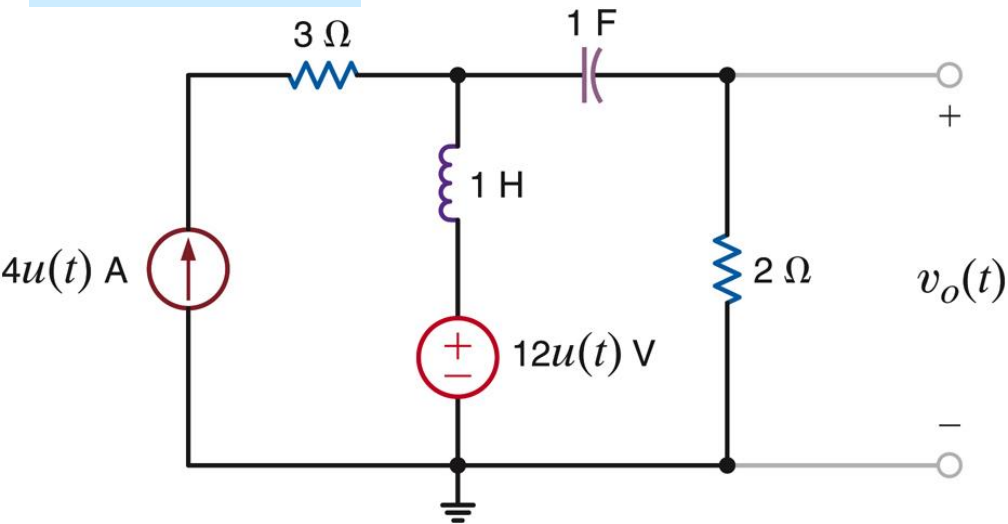
Burada gerilim bölücü kullanılabilirdi

$$(1 + s^2)V_1(s) - s^2V_o(s) = \frac{4s + 12}{s} \quad \times 2s$$

$$-2sV_1(s) + (1 + 2s)V_o(s) = 0 \quad \times (1 + s^2)$$

$$V_o(s) = \frac{8(s + 3)}{(1 + s)^2}$$

## Çevre Analizi



Cevre 1

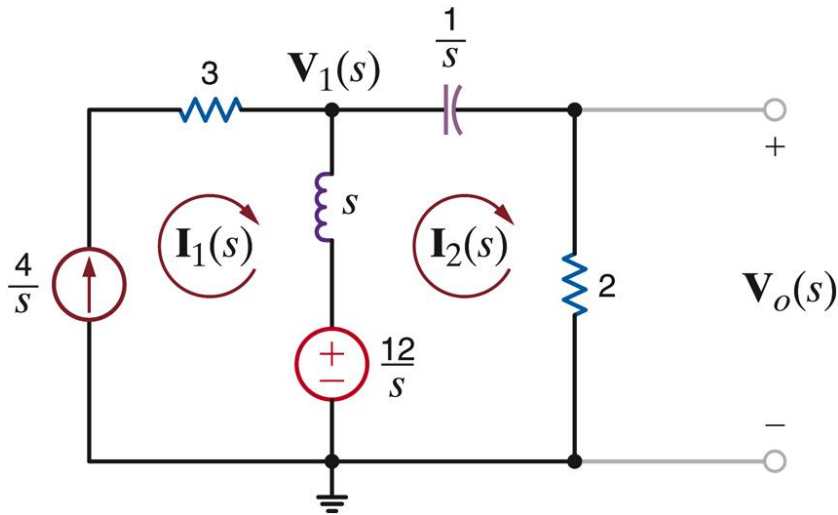
$$I_1(s) = \frac{4}{s}$$

Cevre 2

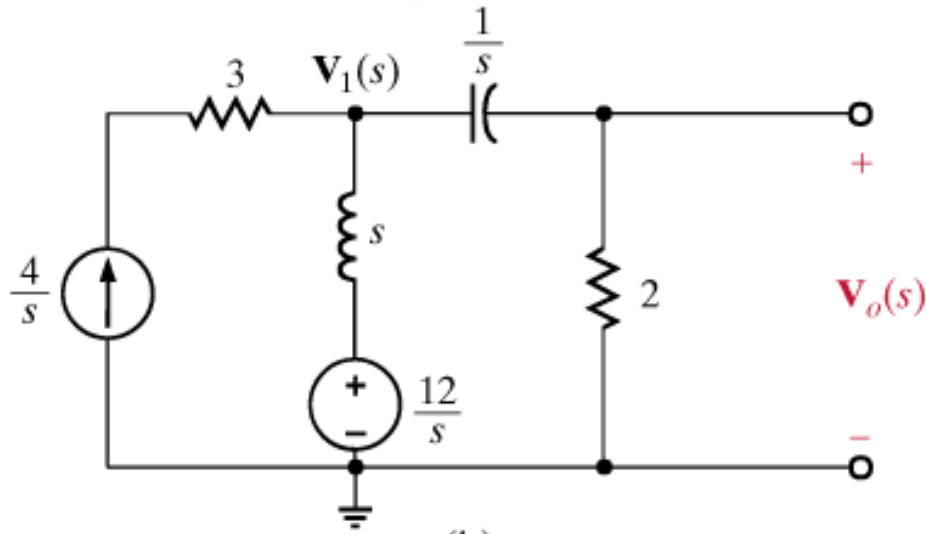
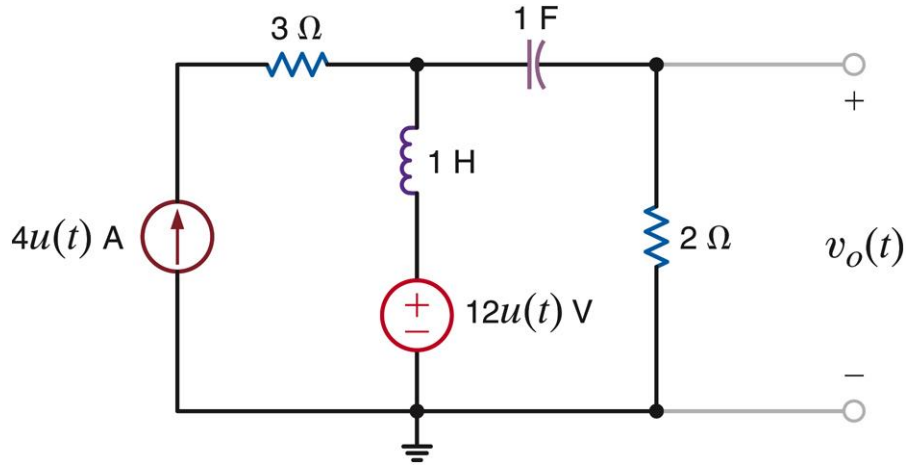
$$s(I_2(s) - I_1(s)) + \frac{1}{s}I_2(s) + 2I_2(s) = \frac{12}{s}$$

$$I_2(s) = \frac{4(s+3)}{(s+1)^2}$$

$$V_o(s) = 2I_2(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$

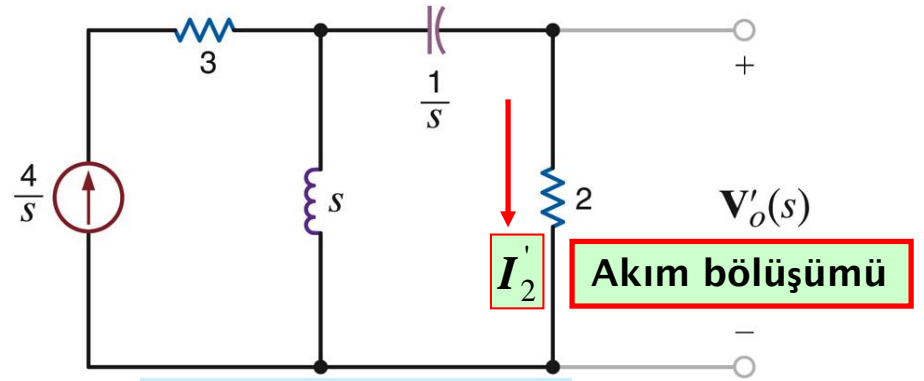


# Kaynak Süperpozisyonu



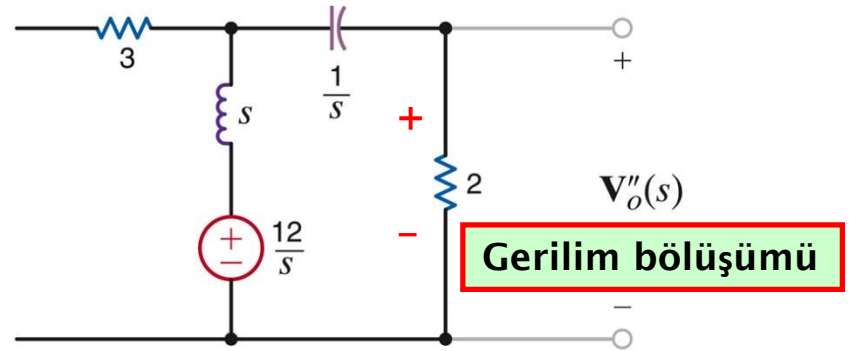
$$V_o(s) = V_o'(s) + V_o''(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$

## Akım kaynağını uygulayalım



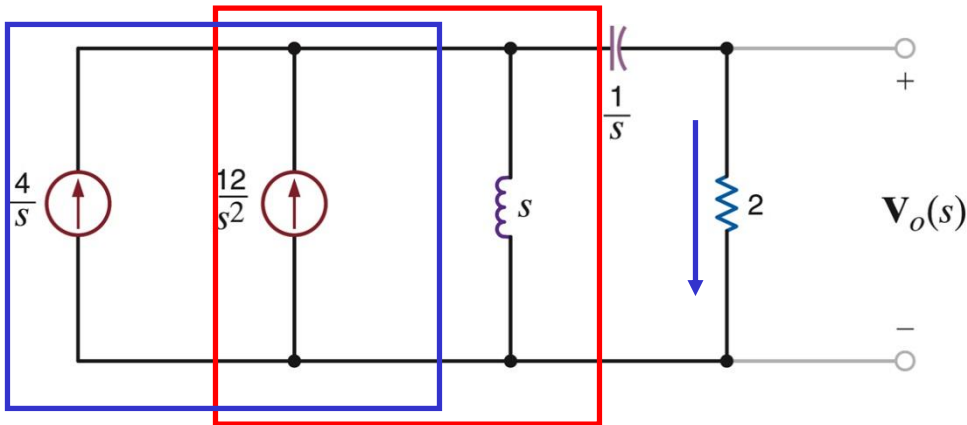
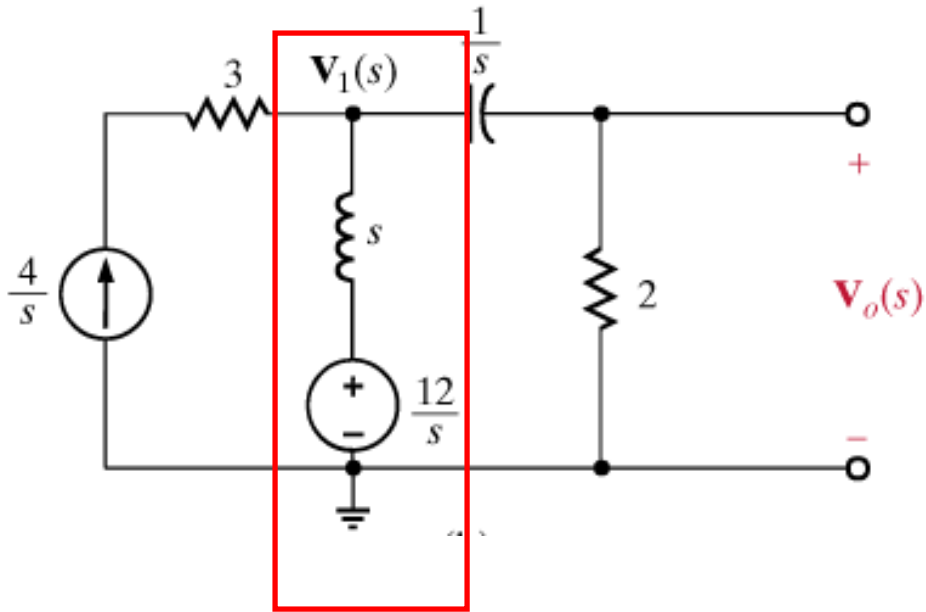
$$V_o'(s) = 2 \times \frac{s}{s + \frac{1}{s} + 2} \times \frac{4}{s}$$

## Gerilim kaynağını uygulayalım



$$V_o''(s) = \frac{2}{2 + \frac{1}{s} + s} \times \frac{12}{s}$$

## Kaynak Dönüşümü



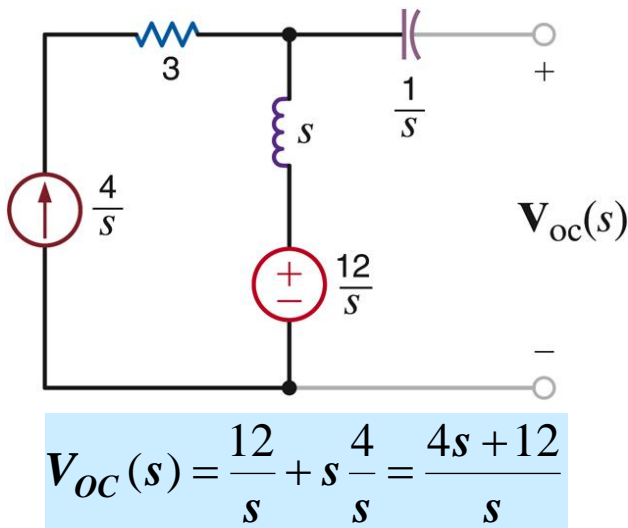
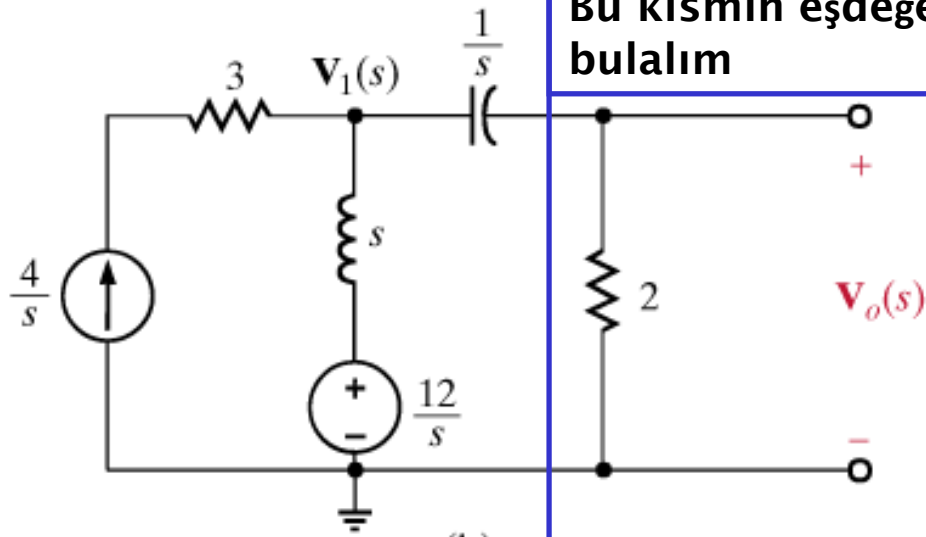
Kaynakları birleştirin ve akım bölüşümünü kullanın

$$V_o(s) = 2 \times \frac{s}{s + \frac{1}{s} + 2} \left( \frac{4}{s} + \frac{12}{s^2} \right)$$

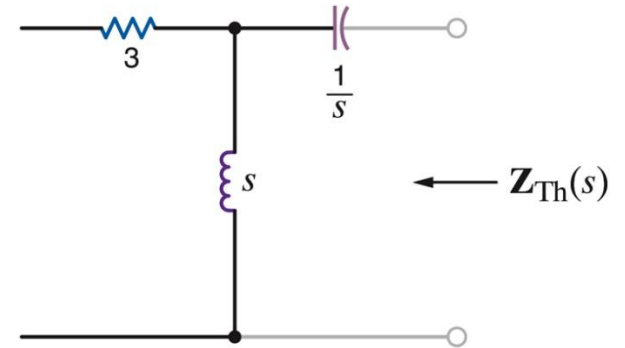
$$V_o(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$

# Thevenin Teoremi ile çözüm

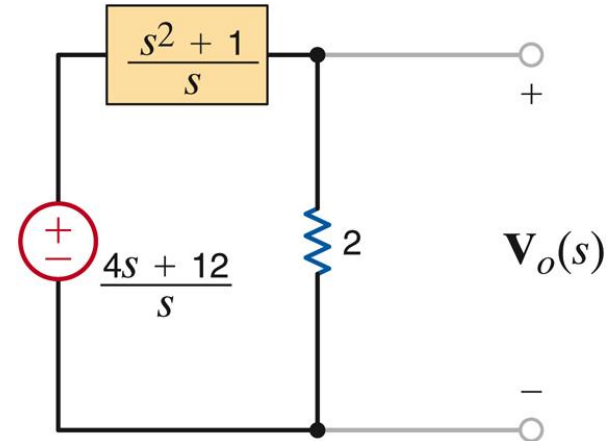
Bu kısmın eşdeğerini bulalım



# Sadece bağımsız kaynaklı bir devre



$$Z_{Th} = \frac{1}{s} + s = \frac{s^2 + 1}{s}$$



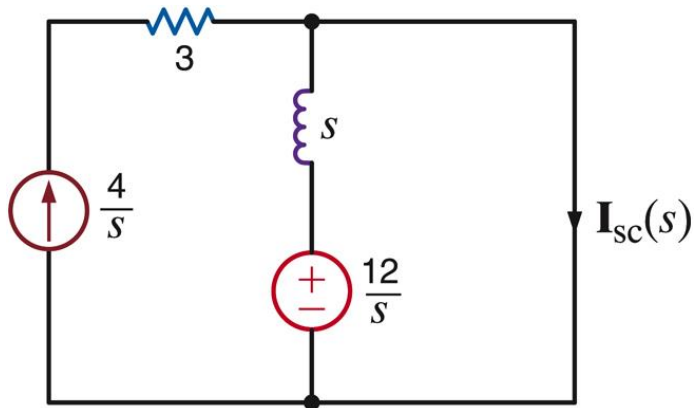
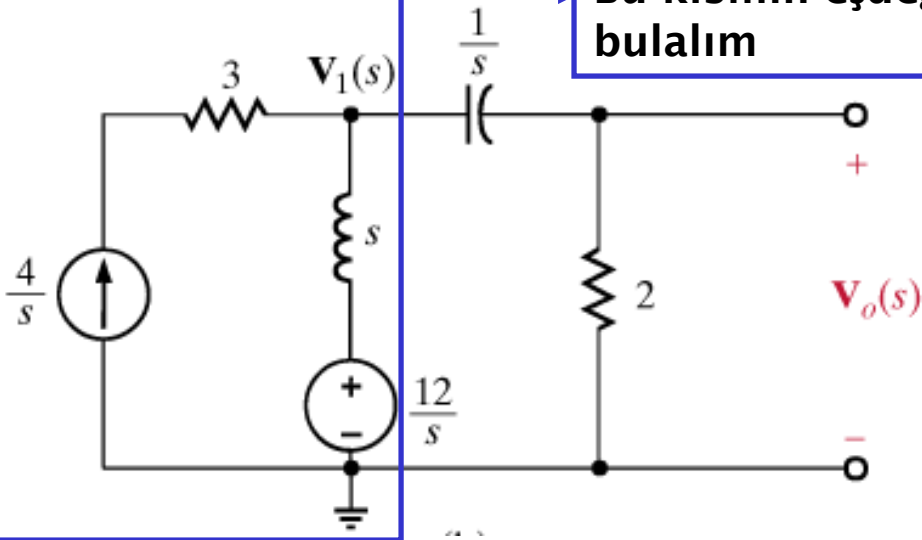
$$V_o(s) = \frac{2}{2 + \frac{s^2 + 1}{s}} \frac{4s + 12}{s}$$

Gerilim bölüşümü

$$V_o(s) = \frac{8(s + 3)}{(s + 1)^2}$$

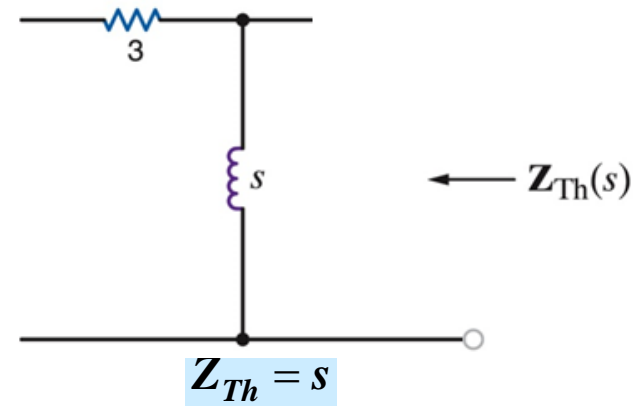
## Norton Teoremi ile çözüm

Bu kısmın eşdeğerini bulalım

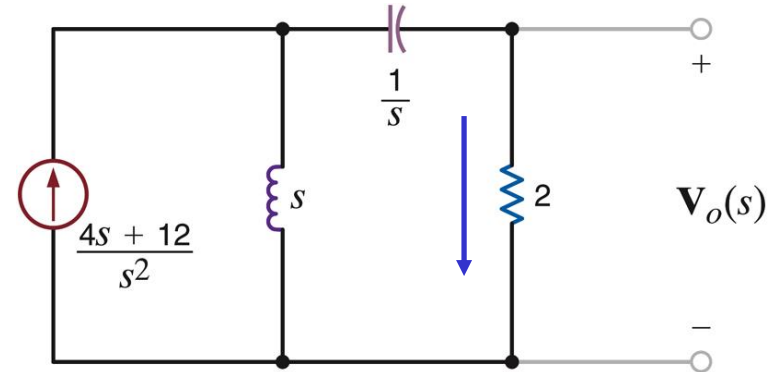


$$I_{sc}(s) = \frac{4}{s} + \frac{12/s}{s} = \frac{4s+12}{s^2}$$

## Sadece bağımsız kaynaklı bir devre



$$Z_{Th} = s$$



$$V_o(s) = 2 \times \frac{s}{s + \frac{1}{s} + 2} \frac{4s+12}{s^2}$$

Akım bölüşümü

$$V_o(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$

## Şimdi $V_o(s)$ 'i $v_o(t)$ 'ye dönüştürelim

$$V_o(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$

$$V_o(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2} = \frac{K_{11}}{(s+1)^2} + \frac{K_{12}}{s+1}$$

$$8(s+3)|_{s=-1} = K_{11}$$

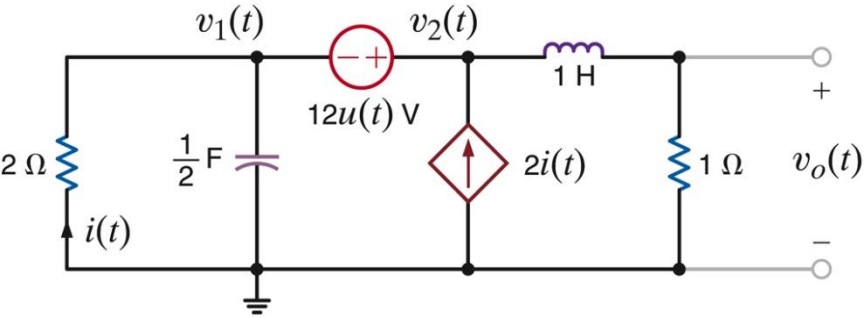
$$16 = K_{11}$$

$$\left. \frac{d}{ds} [8(s+3)] \right|_{s=-1} = K_{12}$$

$$8 = K_{12}$$

$$v_o(t) = (16te^{-t} + 8e^{-t})u(t) \text{ V}$$

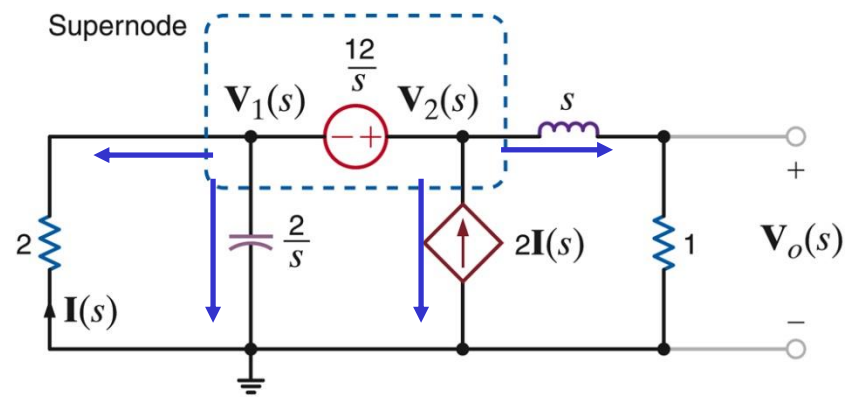
**ÖRNEK**  $v_o(t)$  gerilimini bulun. Tüm başlangıç şartlarını sıfır kabul edin



**Analiz tekniğinin seçimi:**

- . Üç göz, üç referans olmayan düğüm
- . Referans olmayan düğümler arasında bir gerilim kaynağı -**süper düğüm**
- . Bir akım kaynağı. Bilinen bir çevre akımı veya **süper çevre**
- . Eğer  $v_2$  bilirse  $v_o$  gerilim bölüşümü ile bulunabilir

**Devrenin s-düzlemine aktarılması**



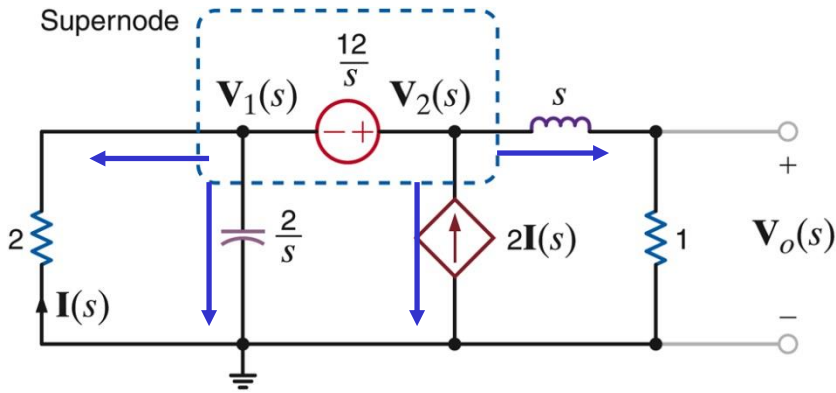
Süperdüğüm den :  $V_2(s) - V_1(s) = \frac{12}{s}$

Süperdüğüm e KAK :  $\frac{V_1(s)}{2} + \frac{V_1(s)}{2/s} - 2I(s) + \frac{V_2(s)}{s+1} = 0$

Kontrol degiskeni :  $I(s) = -\frac{V_1(s)}{2}$

Gerilim bölüşümü :  $V_o(s) = \frac{1}{s+1} V_2(s)$

s-düzlemine aktarılmış devre



$$V_2(s) - V_1(s) = \frac{12}{s}$$

$$\frac{V_1(s)}{2} + \frac{V_1(s)}{2/s} - 2I(s) + \frac{V_2(s)}{s+1} = 0$$

$$I(s) = -\frac{V_1(s)}{2}$$

$$V_o(s) = \frac{1}{s+1} V_2(s)$$

Cebirsel işlemleri yapalım

$$V_1(s) = V_2(s) - 12/s$$

$$I(s) = -V_2(s)/2 + 6/s$$

$$(1/2)(s+1)(V_2(s) - 12/s) - 2(-V_2(s)/2 + 6/s) + V_2(s)/(s+1) = 0$$

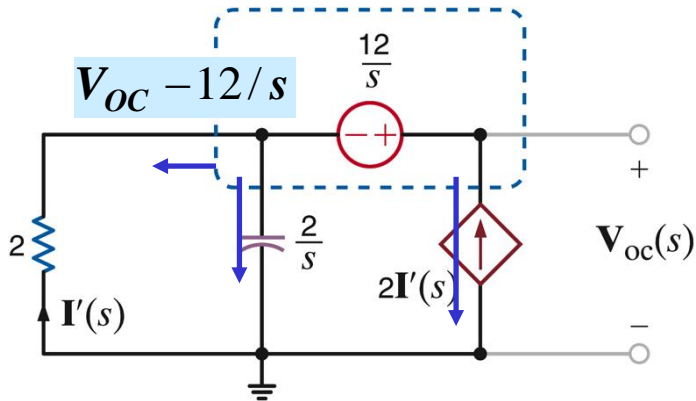
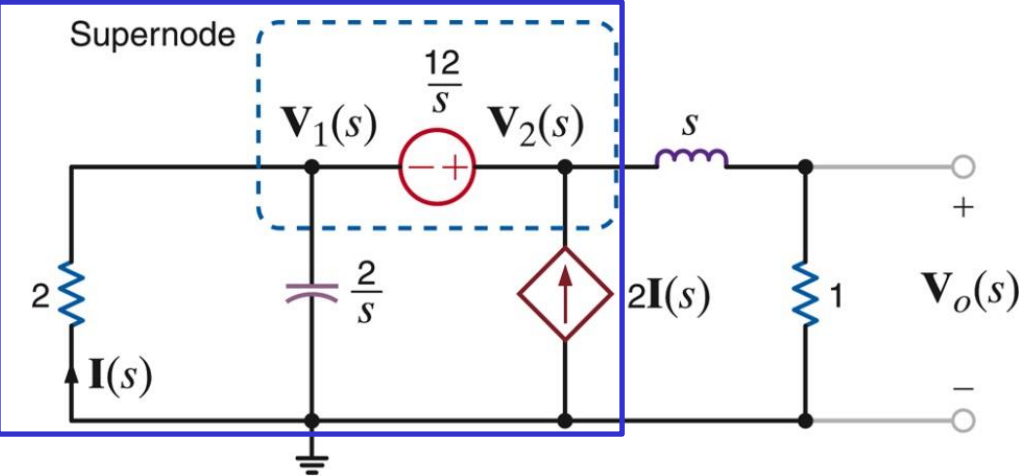
$$V_2(s) = \frac{12(s+1)(s+3)}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

$$V_o(s) = \frac{12(s+3)}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

Örnek - devamı

$V_o(s)$  gerilimini Thevenin teoremi ile bulun.

- Bağımlı kaynağı ve kontrol değişkenini aynı alt devrede tutun.
- Mümkün olduğunca alt devreyi sade hale getirmeye çalışın.
- Thevenin eşdeğerine dönüştürdükten sonra gerilim bölücü ile sonuca gidin

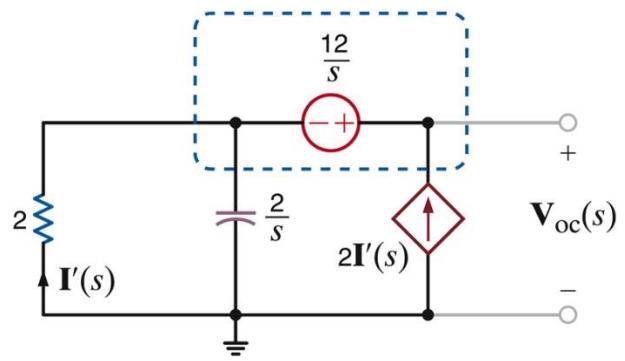


$$\frac{V_{OC} - 12/s}{2} + \frac{V_{OC} - 12/s}{2/s} - 2I' = 0$$

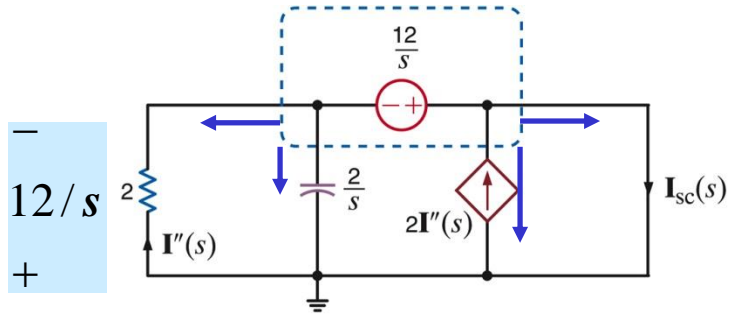
$$I' = -\frac{V_{OC} - 12/s}{2}$$

$$-I' + (-2I')/(2/s) - 2I' = 0 \Rightarrow I' = 0$$

$$V_{OC}(s) = \frac{12}{s}$$



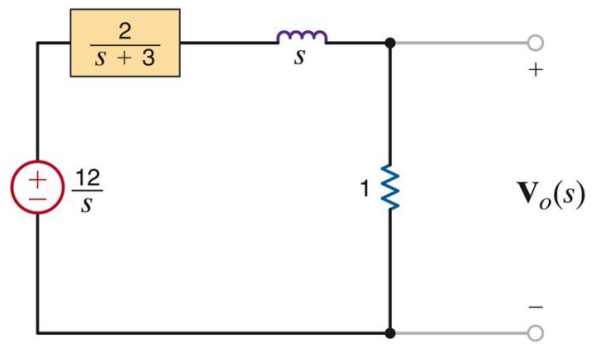
Thevenin empedansını ( $Z_{TH}$ ) bulalım



$$I_{SC} - 2I'' - I'' - 2I'' / (2/s) = 0 \quad I'' = 6/s$$

$$I_{SC} = \frac{6(s+3)}{s}$$

$$Z_{TH} = \frac{V_{OC}(s)}{I_{SC}(s)} = \frac{2}{s+3}$$



$$V_o(s) = \frac{1}{1+s+\frac{2}{s+3}} \times \frac{12}{s}$$

$$V_o(s) = \frac{12(s+3)}{s(s^2+4s+5)}$$

S-düzleminde analiz ile, çıkış geriliminin Laplace dönüşümünü elde ettik

$$V_o(s) = \frac{12(s+3)}{s(s^2+4s+5)} \quad s^2+4s+5 = (s+2-j1)(s+2+j1)$$

$$V_o(s) = \frac{12(s+3)}{s(s+2-j1)(s+2+j1)} = \frac{K_o}{s} + \frac{K_1}{s+2-j1} + \frac{K_1^*}{s+2+j1}$$

$$\frac{K_1}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K_1^*}{s+\alpha+j\beta} \leftrightarrow 2|K_1|e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \angle K_1)u(t)$$

$$K_o = sV_o(s)|_{s=0} = \frac{36}{5}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= (s+2-j1)V_o(s)|_{s=-2+j1} = \frac{12(1+j1)}{(-2+j1)(j2)} = \frac{12\sqrt{2}\angle 45^\circ}{\sqrt{5}\angle 153.43^\circ(2\angle 90^\circ)} \\ &= 3.79\angle -198.43^\circ = 3.79\angle 161.57^\circ \end{aligned}$$

$$v_o(t) = \left( \frac{36}{5} + 7.59e^{-2t} \cos(t + 161.57^\circ) \right) u(t) V$$

S-düzleminde analiz ile, çıkış geriliminin Laplace dönüşümünü elde ettik

$$V_o(s) = \frac{12(s+3)}{s(s^2+4s+5)}$$

$$s^2+4s+5 = (s+2-j1)(s+2+j1) = (s+2)^2+1$$

ikinci dereceden faktörler de kullanılabilir...

$$V_o(s) = \frac{12(s+3)}{s[(s+2)^2+1]} = \frac{C_o}{s} + \frac{C_1(s+2)}{(s+2)^2+1} + \frac{C_2}{(s+2)^2+1}$$

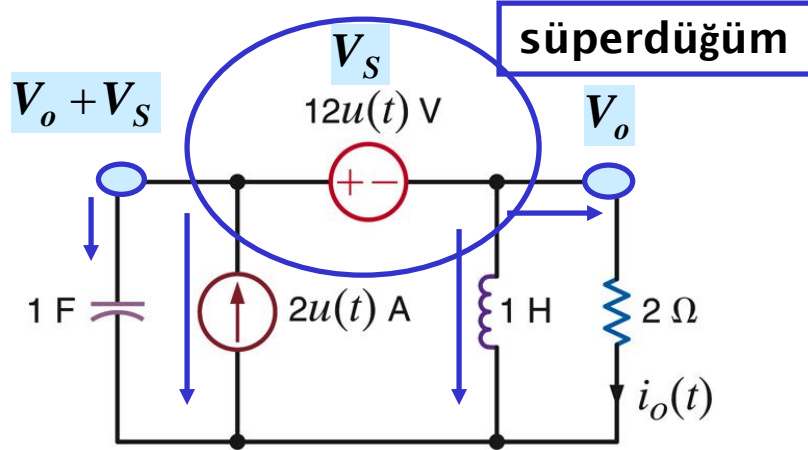
$$\frac{C_1(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{C_2\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \leftrightarrow e^{-\alpha t} [C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t] u(t)$$

$$C_o = sV_o(s)|_{s=0} = 36/5$$

$$12(s+3) = C_o((s+2)^2+1) + s[C_1(s+2) + C_2] \quad s = -2 \Rightarrow 12 = C_o - 2C_2 \Rightarrow C_2 = 36/10 - 6 = -12/5$$

$$s^2 \text{ 'nin esitlik katsayıları } i: 0 = C_o + C_1 \Rightarrow C_1 = -36/5$$

$$v_o(t) = \left[ \frac{36}{5} (1 - e^{-2t} \cos t) - \frac{12}{5} e^{-2t} \sin t \right] u(t) V$$

**ÖRNEK**Düğüm denklemleri ile  $i_o(t)$  akımını bulunuz

Sıfır başlangıç şartlarını varsayalım

Süperdüğüme KAK uygulayalım  
(devre s-düzlemindeymiş gibi)

$$Cs(V_o(s) + V_S(s)) - \frac{2}{s} + \frac{V_o(s)}{Ls} + \frac{V_o(s)}{2} = 0$$

$$V_S(s) = \frac{12}{s}, \quad I_o(s) = \frac{V_o(s)}{2}$$

Cebirsel işlemleri yapalım

$$I_o(s) = \frac{1-6s}{s^2 + 0.5s + 1} = \frac{1-6s}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}$$

$$I_o(s) = \frac{1-6s}{\left(s + \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\left(s + \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)} = \frac{K_1}{\left(s + \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)} + \frac{K_1^*}{\left(s + \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)}$$

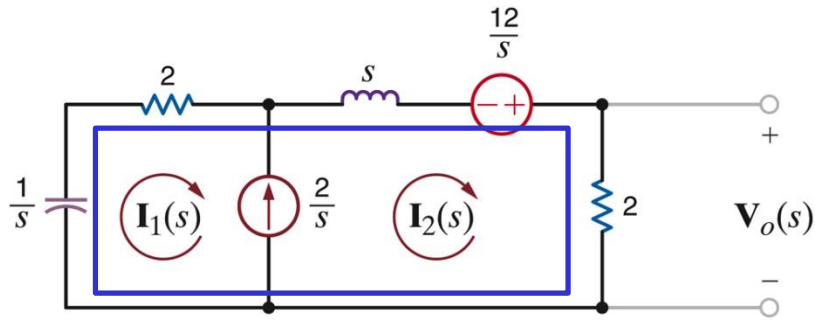
$$I_o(s) = \frac{1-6s}{\left(s + \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\left(s + \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)} = \frac{K_1}{\left(s + \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)} + \frac{K_1^*}{\left(s + \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)}$$

$$\frac{K_1}{(s + \alpha - j\beta)} + \frac{K_1^*}{(s + \alpha + j\beta)} \leftrightarrow 2 |K_1| e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \angle K_1) u(t)$$

$$K_1 = \left(s + \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}\right) I_o(s) \Big|_{s = -\frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1-6\left(-\frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)}{2j\frac{\sqrt{15}}{4}}$$

$$K_1 = \frac{6.33 \angle -66.72^\circ}{0.97 \angle 90^\circ} = 6.53 \angle -156.72^\circ$$

$$i_o(t) = 13.06 e^{-\frac{t}{4}} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{4} t - 156.72^\circ\right) u(t) A$$

**ÖRNEK**Çevre denklemleri ile  $v_o(t)$  gerilimini bulunuz

süperçevre

$$I_2 - I_1 = \frac{2}{s}$$

Süper çevreye KKG uygulayalım

$$\frac{1}{s} I_1 + 2I_1 + sI_2 - \frac{12}{s} + 2I_2 = 0$$

 $I_2$  için çözelim

$$I_2(s) = \frac{16s + 2}{s(s^2 + 4s + 1)} = \frac{16s + 2}{s(s + 0.27)(s + 3.73)}$$

$$I_2(s) = \frac{16s + 2}{s(s^2 + 4s + 1)} = \frac{16s + 2}{s(s + 0.27)(s + 3.73)}$$

Ters dönüşümü yapalım

$$I_2(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + 0.27} + \frac{K_2}{s + 3.73}$$

$$K_0 = sI_2(s) \big|_{s=0} = 2$$

$$K_1 = (s + 0.27)I_2(s) \big|_{s=-0.27} = \frac{16(-0.27) + 2}{(-0.27)(-0.27 + 3.73)} = 2.48$$

$$K_2 = (s + 3.73)I_2(s) \big|_{s=-3.73} = \frac{16(-3.73) + 2}{(-3.73)(-3.73 + 0.27)} = -4.47$$

$$i_2(t) = \left( 2 + 2.48e^{-0.27t} - 4.47e^{-3.73t} \right) u(t) A$$

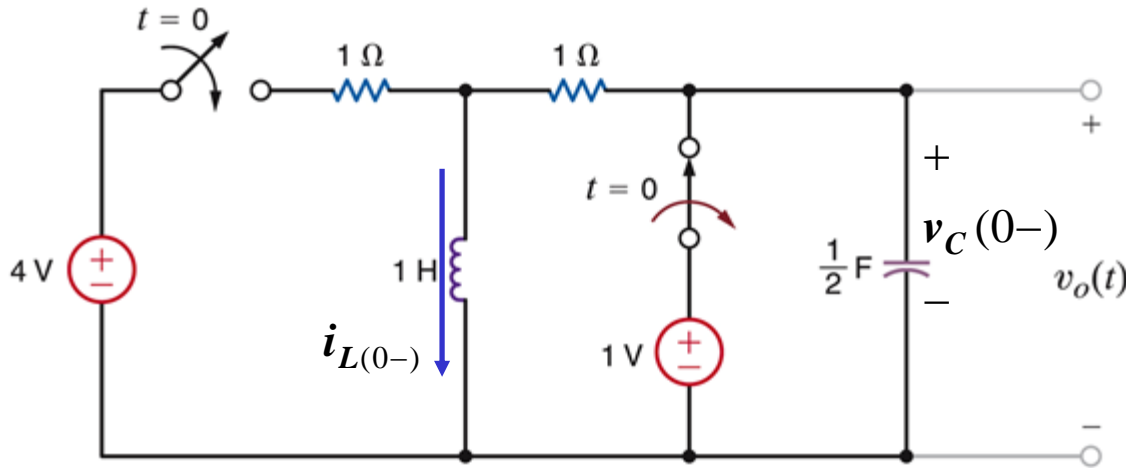
$$v_o(t) = 2i_2(t) V$$

# LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ KULLANARAK GEÇİCİ DEVRE ANALİZİ

Geçici durum çalışmasında, (özellikle anahtarların durum değiştirmesi sırasında) başlangıç şartlarının belirlenmesi önemlidir.

Bunun için şu özelliklere dikkat etmek gerekir:

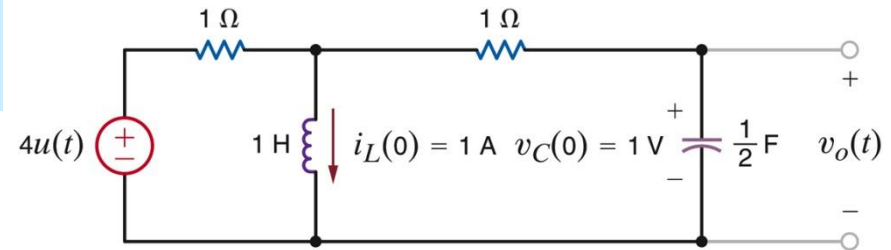
1. Kapasitör uçlarındaki gerilim anlık olarak değişemez
2. İndüktörden geçen akım anlık olarak değişemez

**ÖRNEK** $t > 0$  için,  $v_o(t)$  gerilimini bulunuz

$t < 0$  için kalıcı durumda olduğunu varsayın ve kapasitörlerdeki gerilim ile indüktörlerden geçen akımı belirleyin

DA durumunda kapasitörler açık devre indüktörler kısa devredir

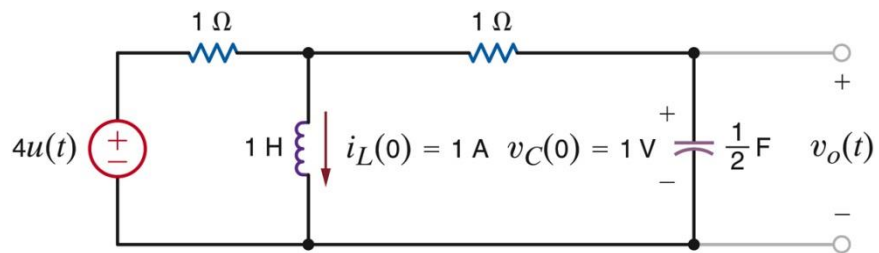
$$v_C(0^-) = 1V, i_L(0^-) = 1A$$



$t > 0$  için devre

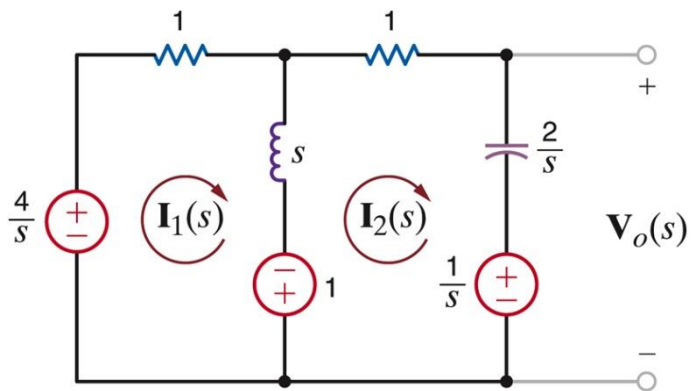
**ÖRNEK - devamı**

$t > 0$  için,  $v_o(t)$  gerilimini bulunuz



**t > 0 için devre**

**Devreyi s-düzlemine aktaralım**



**Çevre analizini kullanalım**

$$(s + 1)I_1 - sI_2 = \frac{4}{s} + 1 \quad \times s \quad \text{I}_2 \text{ için çözü}$$

$$-sI_1 + (s + 1 + \frac{2}{s})I_2 = -\frac{1}{s} - 1 \quad \times (s + 1)$$

$$I_2(s) = \frac{2s - 1}{2s^2 + 3s + 2} \quad V_o(s) = \frac{2}{s} I_2(s) + \frac{1}{s}$$

$$V_o(s) = \frac{2s + 7}{2s^2 + 3s + 2} = \frac{s + \frac{7}{2}}{s^2 + \frac{3}{2}s + 1}$$

$t > 0$  için,  $v_o(t)$  gerilimini bulunuz

$$V_o(s) = \frac{s + \frac{7}{2}}{s^2 + \frac{3}{2}s + 1}$$

şimdi ters dönüşümü gerçekleştirelim

$b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$  karmaşık eşlenik kökler

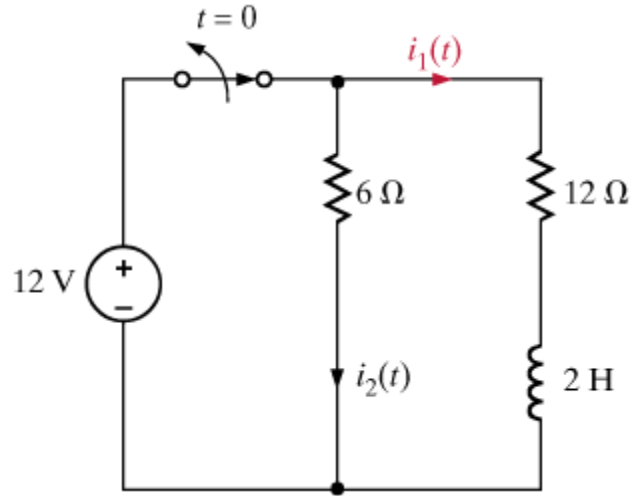
$$V_o(s) = \frac{K_1}{s + \frac{3}{4} - j\frac{\sqrt{7}}{4}} + \frac{K_1^*}{s + \frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

$$K_1 = \left( s + \frac{3}{4} - j\frac{\sqrt{7}}{4} \right) V_o(s) \Big|_{s = -\frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

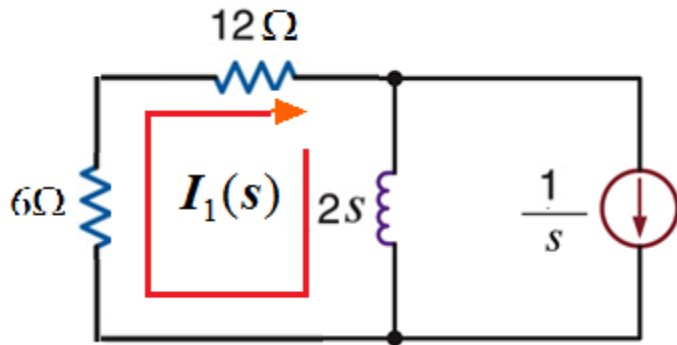
$$K_1 = 2.14 \angle -76.5^\circ$$

$$\frac{K_1}{(s + \alpha - j\beta)} + \frac{K_1^*}{(s + \alpha + j\beta)} \leftrightarrow 2 |K_1| e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \angle K_1) u(t)$$

$$v_o(t) = \left[ 4.28 e^{-\frac{3}{4}t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t - 76.5^\circ\right) \right] u(t) V$$

**ÖRNEK** $t > 0$  için,  $i_1(t)$  akimini bulunuz**indüktörden geçen başlangıç akımı**

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 1A$$



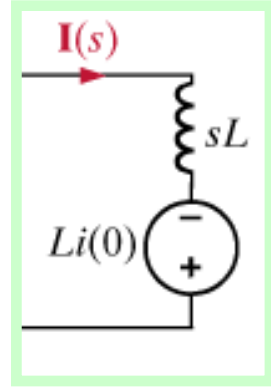
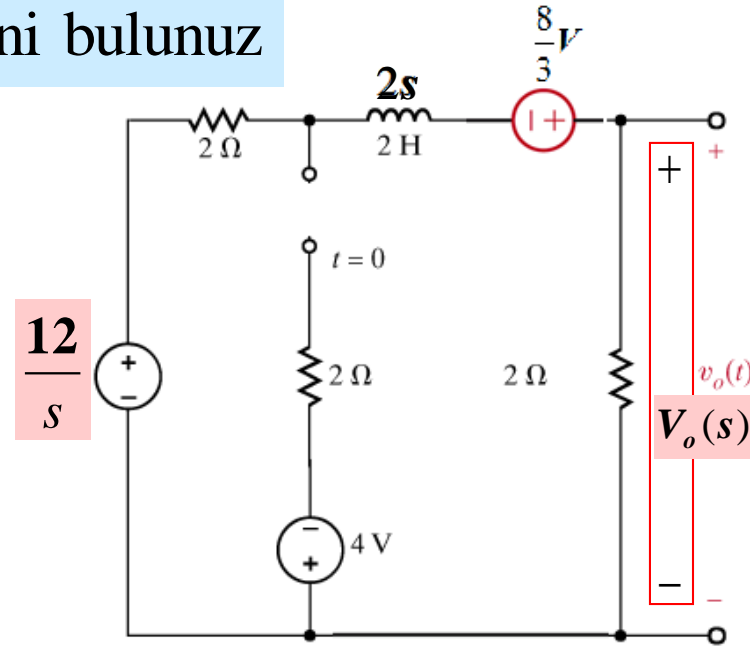
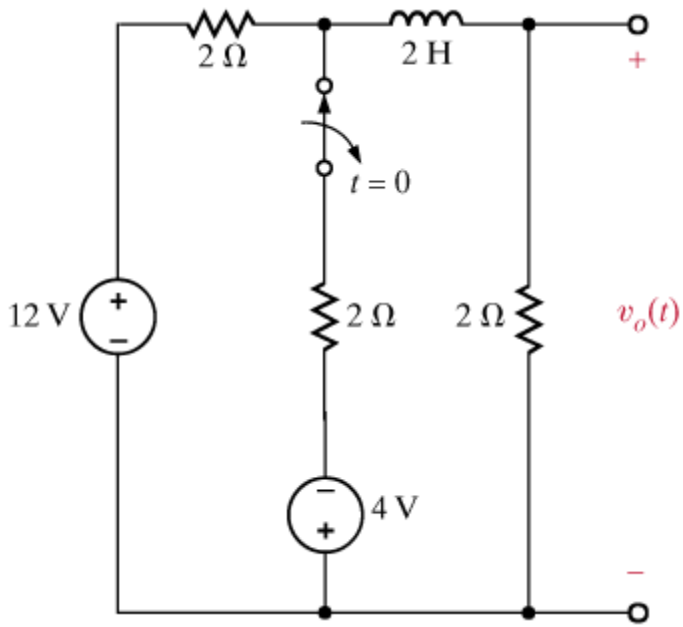
$$I_1(s) = \frac{2}{2s + 18}$$

$$I_1(s) = \frac{1}{s + 9}$$

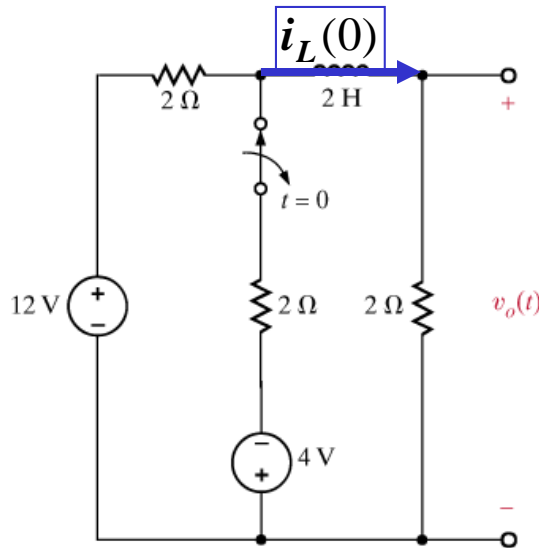
$$i_1(t) = e^{-9t} u(t) A$$

**ÖRNEK**

$t > 0$  için,  $v_o(t)$  gerilimini bulunuz



indüktörden geçen başlangıç akımını bulun



**Süperpozisyon kullanın**

$i_{12V} = 2A$

$i_{4V} = -\frac{2}{3}A$

$i_L(0) = \frac{4}{3}A$

$V_o(s) = \frac{2}{4+2s} \times \left( \frac{12}{s} + \frac{8}{3} \right)$  (gerilim bölüşümü)

$V_o(s) = \frac{(8s+36)}{3s(s+2)} = \frac{1}{3} \left[ \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} \right]$

$K_1 = sV_o(s) |_{s=0} = 18$

$K_2 = (s+2)V_o(s) |_{s=-2} = -10$

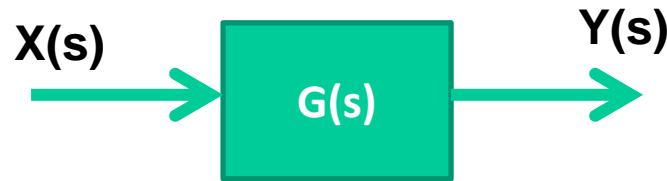
$v_o(t) = \frac{1}{3} (18 - 10e^{-2t}) = \left( 6 - \frac{10}{3}e^{-2t} \right) u(t)V$

# TRANSFER FONKSİYONU

# Transfer Fonksiyonu

**Transfer fonksiyonları**, doğrusal zamanla değişmeyen diferansiyel denklemlerle tanımlanan sistemlerin veya elemanların giriş ve çıkış bağıntılarını ifade etmek için kullanılırlar.

Başlangıç şartları sıfır alınmak kaydıyla çıkış değişkeni Laplace dönüşümünün giriş değişkeni Laplace dönüşümüne oranı olarak tanımlanırlar.



**Matematiksel bir model için giriş / çıkış ilişkileri, genellikle  $s$  düzleminde iki polinomun oranı ile verilir.**

# Transfer Fonksiyonu

Doğrusal zamanla değişmeyen sistemin diferansiyel denklemi aşağıdaki şekilde verilmiş olsun:

Sistem modeli dif. denklem ise

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

burada  $y(t)$  sistemin çıkışı  $x(t)$  ise sistemin girişidir.

# Transfer Fonksiyonu

Bütün başlangıç şartlarının sıfır olduğunu kabul ederek her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım,

Baslangic sartlari sifir ise

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^k y}{dt^k}\right] = s^k Y(s)$$

$$\begin{aligned} a_n s^n Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) \\ = b_m s^m X(s) + \dots + b_1 s X(s) + b_0 X(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) \\ = (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0) X(s) \end{aligned}$$

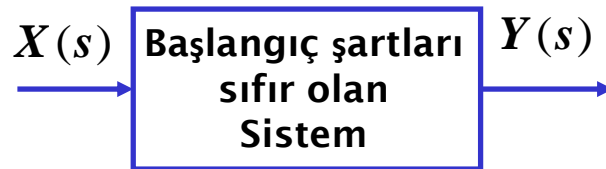
Çıkışın laplace dönüşümü  $Y(s)$ 'i girişin laplace dönüşümü  $X(s)$ 'e bölerek ,  $G(s)$  oranını elde edelim.

$$\mathbf{G(s)} = \frac{\mathbf{Y(s)}}{\mathbf{X(s)}} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

$G(s)$  sıfır başlangıç şartlarında bu sistemin transfer fonksiyonudur.

# Transfer Fonksiyonu

Transfer fonksiyonlarını blok diyagramlarla temsil edebiliriz,



$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Darbe fonksiyonu için  
 $x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(s) = 1$

Transfer fonksiyonlarının gücü,  $X(s)$  rastgele girişi için  $Y(s)$  çıkışlarını hesaplama yetenekleridir,

$$Y(s) = X(s)G(s)$$

Transfer fonksiyonu,  
Laplace değişkeni  $s$ 'in bir fonksiyonu olarak bloğun "kazancı" dır.

**ÖRNEK**

Aşağıdaki Diff.Denk. için transfer fonksiyonunu bulun,

$$\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = r(t)$$

Sıfır başlangıç koşulları altında iki tarafın Laplace Dönüşümünü alın,

$$sC(s) + 2C(s) = R(s)$$

$$C(s)(s + 2) = R(s)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s + 2}$$

Giriş  $r(t) = u(t)$  ise, zaman cevabını hesaplayın,

$$\begin{aligned} C(s) &= R(s)G(s) \\ &= \frac{1}{s} \frac{1}{s + 2} \end{aligned}$$

$$C(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s + 2}$$

(Kısmi kesirlere ayırma)

$$c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

**ÖRNEK**

Bir devrenin impulse (dürtü) cevabı  $g(t) = e^{-t}u(t)$

$v_i(t) = 10e^{-2t}u(t)$  girişi için  $v_o(t)$  cevabını bulun

Laplace düzleminde,  $Y(s)=G(s)X(s)$

$$\therefore V_o(s) = G(s)V_i(s)$$

$$g(t) = e^{-t}u(t) \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$v_i(t) = 10e^{-2t}u(t) \Rightarrow V_i(s) = \frac{10}{s+2}$$

$$V_o(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1 = (s+1)V_o(s)|_{s=-1} = 10$$

$$K_2 = (s+2)V_o(s)|_{s=-2} = -10$$

$$v_o(t) = 10(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

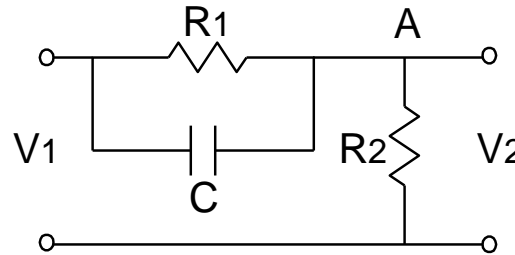
## Bir sistemin transfer fonksiyonunun elde edilmesi

İlerideki kısımlarda fiziksel sistemlerin matematiksel modelleri elde edilirken, transfer fonksiyonlarının elde edilmesi ile ilgili örnekler verilecektir. Burada transfer fonksiyonunun kavram olarak anlaşılması için basit bir örnek verilmektedir.

### ÖRNEK

Aşağıdaki şekilde verilen elektrik devresinin transfer fonksiyonunu elde ediniz.

$$T(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = ?$$



Önce sistemin diferansiyel denklemi elde edilir.  
A noktasına Kirchoff'un akımlar kanunu uygulandığında;

$$\frac{V_2 - V_1}{R_1} + C \frac{d(V_2 - V_1)}{dt} + \frac{V_2}{R_2} = 0$$

olarak devrenin diferansiyel denklemi elde edilir.

## Bir sistemin transfer fonksiyonunun elde edilmesi (devam)

$$\frac{V_2}{R_1} - \frac{V_1}{R_1} + C \frac{dV_2}{dt} - C \frac{dV_1}{dt} + \frac{V_2}{R_2} = 0$$

$$V_2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + C \frac{dV_2}{dt} = \frac{V_1}{R_1} + C \frac{dV_1}{dt}$$

Başlangıç şartları sıfır alınarak elde edilen diferansiyel denklemin Laplace dönüşümü alındığında,

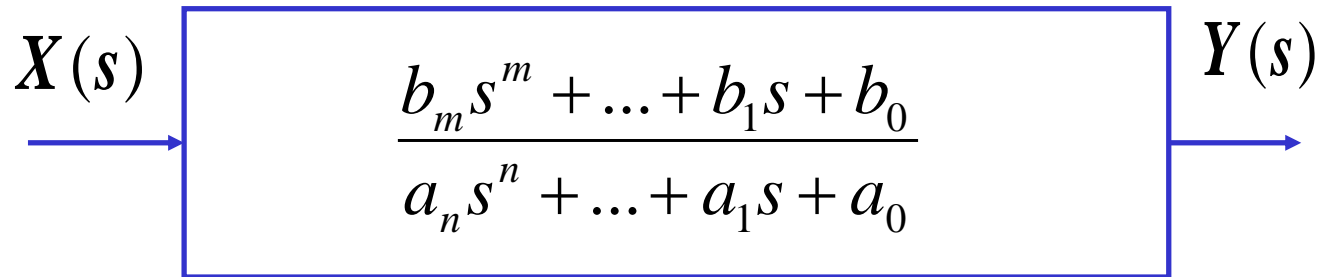
$$V_2(s) \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) + Cs V_2(s) = V_1(s) \left( \frac{1}{R_1} + Cs \right)$$

$$V_2(s) \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} + Cs \right) = V_1(s) \left( \frac{1}{R_1} + Cs \right)$$

$$T(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{R_1} + Cs}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} + Cs}$$

# Karakteristik Denklem

Bir sistemin karakteristik denklemi, o sistemin transfer fonksiyonunun  $[G(s)]$ , payda polinomu sıfıra eşitlenerek elde edilir.



$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Karakteristik denklemin köklerine **Özdeğerler** denir. Sistemin **kararlılığını** ve **geçici durum davranışını** belirler

**Özdeğerler (Eigenvalues):** Payda polinomunun kökleridir. Tüm özdeğerler sistemin kararlı olması için negatif olmalıdır.

# KUTUPLAR VE SIFIRLAR

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Transfer fonksiyonu

Kökleri kullanarak, her polinom, birinci dereceden terimlerin bir çarpımı olarak ifade edilebilir.

$$G(s) = K_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

Paydanın kökleri transfer fonksiyonunun **kutupları** ve payın kökleri de transfer fonksiyonunun **sıfırları** adını alır.

$z_1, z_2, \dots, z_m$  = transfer fonksiyonu nun SIFIRLARI

$p_1, p_2, \dots, p_n$  = transfer fonksiyonu nun KUTUPLARI

# KUTUPLAR VE SIFIRLAR

ÖRNEK

$$G(s) = \frac{(s + 2)}{(s + 5)}$$

**Sıfırlar** : -2  
**Kutuplar**: -5

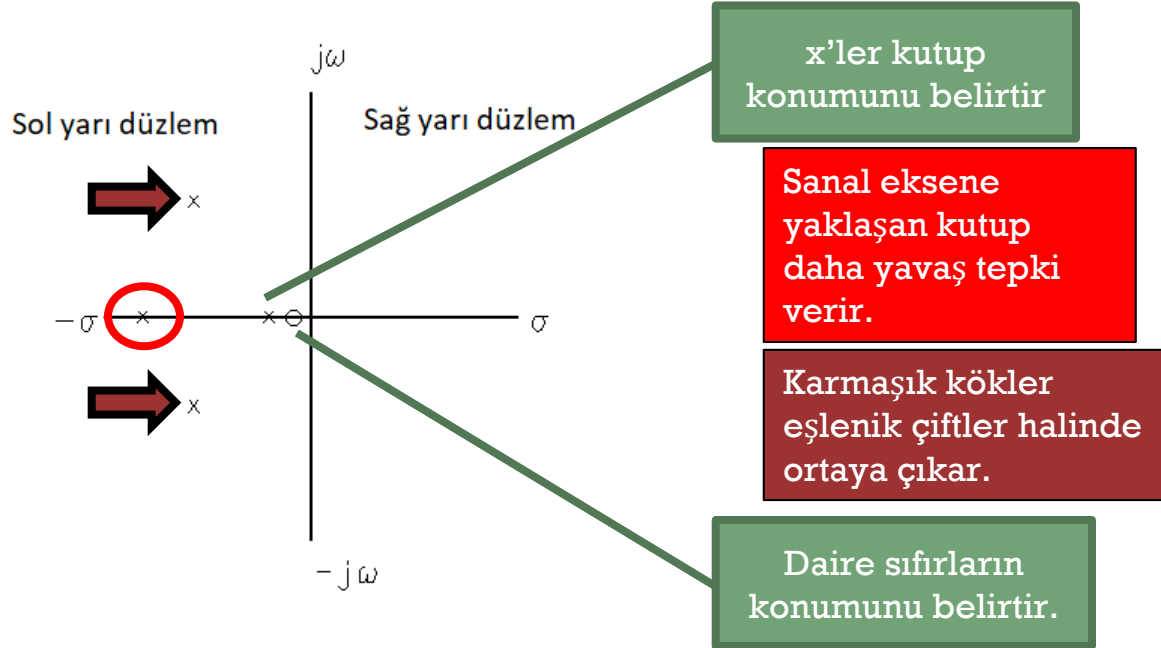
ÖRNEK

$$G(s) = K \frac{(s + 1)(s + 15)}{(s + 3)(s + 5)(s + 8)^2}$$

**Sıfırlar** : -1, -15  
**Kutuplar**: -3, -5, -8(2 tane)

# KUTUPLAR VE SIFIRLAR

Transfer fonksiyonunun kutupları ve sıfırları, sistemlerin cevaplarını belirlerler. Karmaşık ( $s, j\omega$ ) düzlemde çizelim.



# KUTUPLAR VE SIFIRLAR

Kazancı hesaplamak için, transfer fonksiyonu kutuplar, sıfırlar ve s'in bazı değerlerindeki fonksiyonun değerleri ile belirlenebilir.

## ÖRNEK

$$\text{SIFIRLAR : } z_1 = -1,$$

$$\text{KUTUPLAR : } p_1 = -2 + j2, \quad p_2 = -2 - j2$$

$$G(0) = 1$$

$$G(s) = K_0 \frac{(s+1)}{(s+2-j2)(s+2+j2)} = K_0 \frac{s+1}{s^2 + 4s + 8}$$

$$G(0) = K_0 \frac{1}{8} = 1 \Rightarrow$$

$$G(s) = 8 \frac{s+1}{s^2 + 4s + 8}$$

# Birinci dereceden ve ikinci dereceden sistemlerin Impulse (dürtü) cevabı

## Birinci dereceden sistem

$$G(s) = \frac{K\tau}{\tau s + 1} \Rightarrow g(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

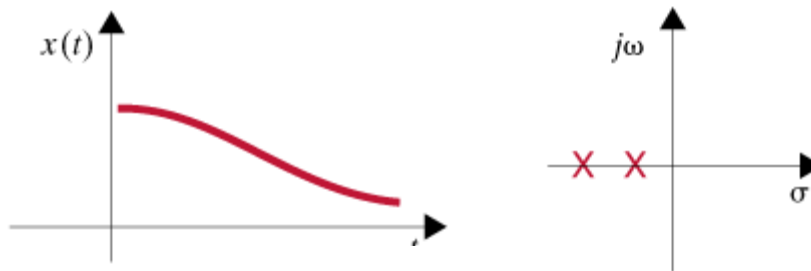
## Normalize ikinci dereceden sistem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

**DURUM 1:**  $\zeta > 1$  (gerçek ve ayrı kökler) **Aşırı Sönümlü**

$$\text{kutuplar: } s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$x(t) = K_1 e^{-(\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})t} + K_2 e^{-(\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})t}$$



(a)

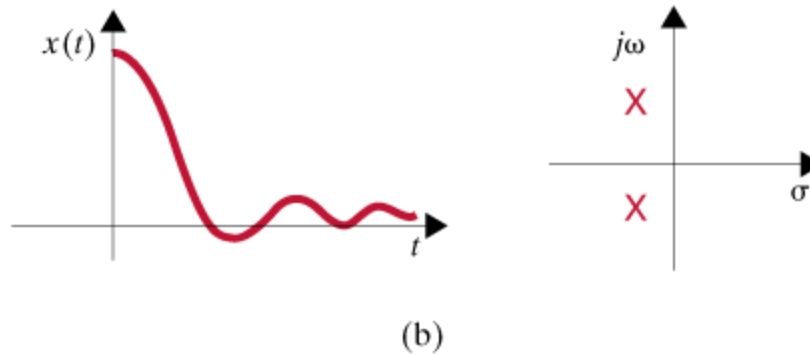
## Normalize ikinci dereceden sistem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

DURUM 2:  $\zeta < 1$  (karmasik kökler) **Az Sönümlü**

$$\text{kutuplar: } s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$x(t) = Ke^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi)$$



## Normalize ikinci dereceden sistem

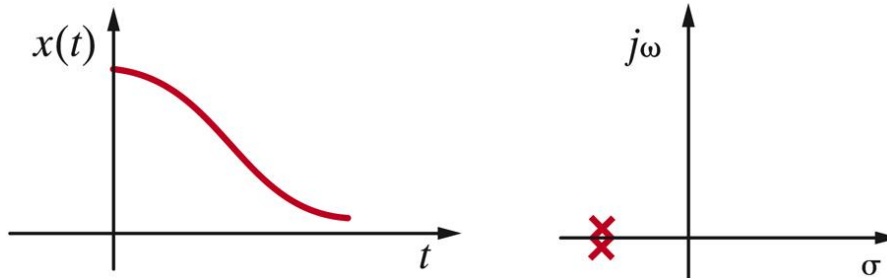
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

DURUM 3:  $\zeta = 1$  (gerçek ve katli kökler) **Kritik Sönümlü**

$$s = -\zeta\omega_n$$

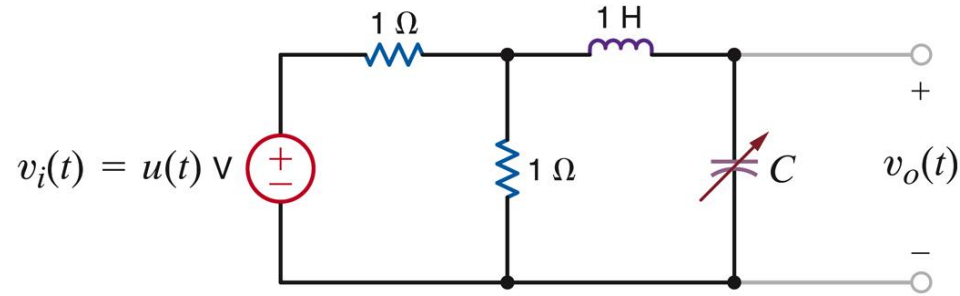
$$s_1 = s_2 = -\zeta\omega_n$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (B_1 + B_2 t)$$

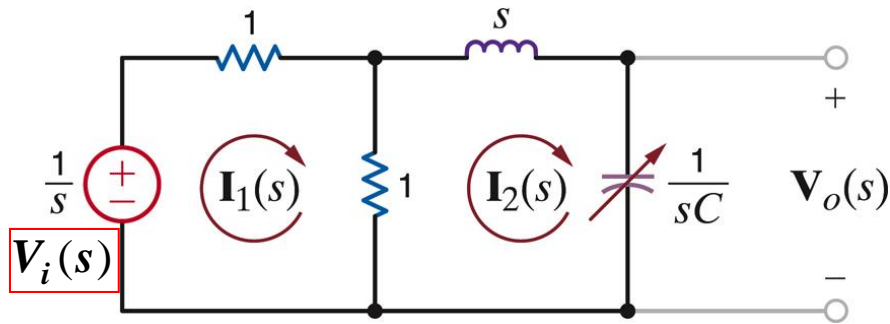


**ÖRNEK**

$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$  transfer fonksiyonunu belirleyin



Başlangıç şartlarını sıfır yaparak, devreyi s-düzlemine aktarın

**Çevre analizi**

$$V_i(s) = 2I_1 - I_2$$

$$0 = -I_1 + \left(1 + s + \frac{1}{sC}\right)I_2 \quad V_o(s) = \frac{1}{sC}I_2(s)$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{(1/2C)}{s^2 + (1/2)s + 1/C}$$

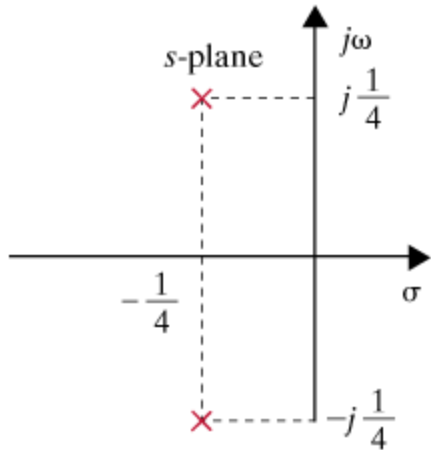
**ÖRNEK-devam**

$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$  transfer fonksiyonunu belirleyin

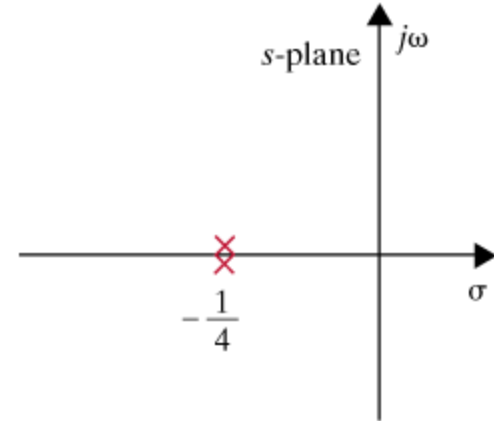
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{(1/2C)}{s^2 + (1/2)s + 1/C}$$

a)  $C=8F \Rightarrow$  kutuplar:  $s_{1,2} = -0.25 \pm j0.25$

b)  $C=16F \Rightarrow$  kutuplar:  $s_{1,2} = -0.25$

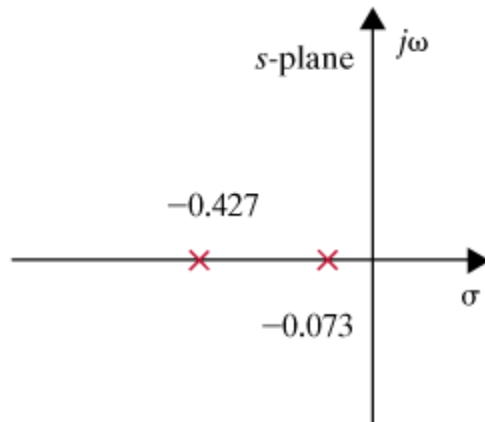


(c)



(d)

c)  $C=32F \Rightarrow$  kutuplar:  $s_{1,2} = -0.427, -0.073$



(e)

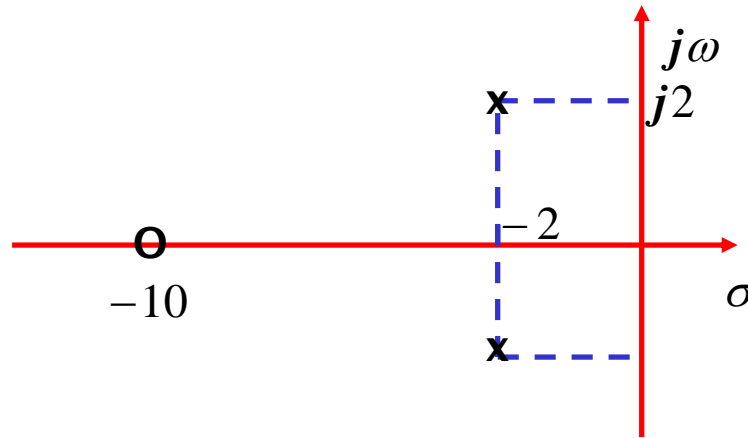
**ÖRNEK**

Kutupları-sıfırları, sönüm çeşidini ve birim basamak cevabını belirleyin

$$G(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 4s + 8}$$

**Sıfır:**  $z = -10$

**Kutuplar:**  $s^2 + 4s + 8 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -2 \pm j2$



$$s^2 + \boxed{4}s + \boxed{8} \Rightarrow \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{2\zeta\omega_n}$        $\boxed{\omega_n^2}$

**Aşırı Sönümlü**

## ÖRNEK

Kutupları-sıfırları, sönüm çeşidini ve birim basamak cevabını belirleyin...

$$G(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 4s + 8}$$

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{s + 10}{s(s^2 + 4s + 8)}$$

$$s^2 + 4s + 8 = (s + 2 - j2)(s + 2 + j2)$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 2 - j2} + \frac{K_2^*}{s + 2 + j2}$$

$$\frac{K_1}{(s + \alpha - j\beta)} + \frac{K_1^*}{(s + \alpha + j\beta)} \leftrightarrow 2 |K_1| e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \angle K_1) u(t)$$

$$K_1 = sY(s) \Big|_{s=0} = \frac{10}{8}$$

$$K_2 = (s + 2 - j2)V_o(s) \Big|_{s=-2+j2} = \frac{8 + j2}{(-2 + j2)(j4)}$$

$$K_2 = \frac{8.25 \angle 14^\circ}{2.83 \angle 135^\circ \times 4 \angle 90^\circ} = 0.73 \angle -211^\circ$$

$$v_o(t) = \left( \frac{10}{8} + 1.46 e^{-2t} \cos(2t - 211^\circ) \right) u(t) V$$

**TABLE 13.1** Short table of Laplace transform pairs

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{t^n e^{-at}}{n!}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
$e^{-at} \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$

**TABLE 13.2** Some useful properties of the Laplace transform

PROPERTY NUMBER	$f(t)$	$F(s)$
1. Magnitude scaling	$Af(t)$	$AF(s)$
2. Addition/subtraction	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F_2(s)$
3. Time scaling	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
4. Time shifting	$f(t - t_0)u(t - t_0), t \geq 0$ $f(t)u(t - t_0)$	$e^{-t_0s} F(s)$ $e^{-t_0s} \mathcal{L}[f(t + t_0)]$
5. Frequency shifting	$e^{-at}f(t)$	$F(s + a)$
6. Differentiation	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \dots - s^0 f^{(n-1)}(0)$
7. Multiplication by $t$	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
8. Division by $t$	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\lambda) d\lambda$
9. Integration	$\int_0^t f(\lambda) d\lambda$	$\frac{1}{s} F(s)$
10. Convolution	$\int_0^t f_1(\lambda)f_2(t - \lambda) d\lambda$	$F_1(s)F_2(s)$